300 AÑOS DESPUÉS... REIVINDICACIÓN DE EULER

ANTONIO PÉREZ SANZ (*)

Hace trescientos años, el 15 de abril de 1707, veía la luz, en Basilea, una de las mentes matemáticas más brillantes de la historia, Leonhard Euler. Y sin ninguna duda el matemático más prolífico. Y sin embargo, aun hoy, Euler, un genio equiparable a William Shakespeare, a Johann Sebastian Bach o a Miguel Angel, es un gran desconocido para el gran público y, lo que es peor, para muchos estudiantes y profesores de matemáticas. Es de justicia histórica y matemática reivindicar su figura en este centenario de su nacimiento, aunque solo sea para poner a cada cual en el sitio que se merece. Y Euler ocupa sin duda una de las cimas más altas de las matemáticas. Tan alta que hay que levantar mucho la vista y mirar... a la Luna.

En el año 2000, hace ahora solo siete años comenzaba yo el guión de un documental sobre este genial matemático, dentro de la serie *Universo Matemático* de TVE, mirando a la Luna, en sentido literario, claro.

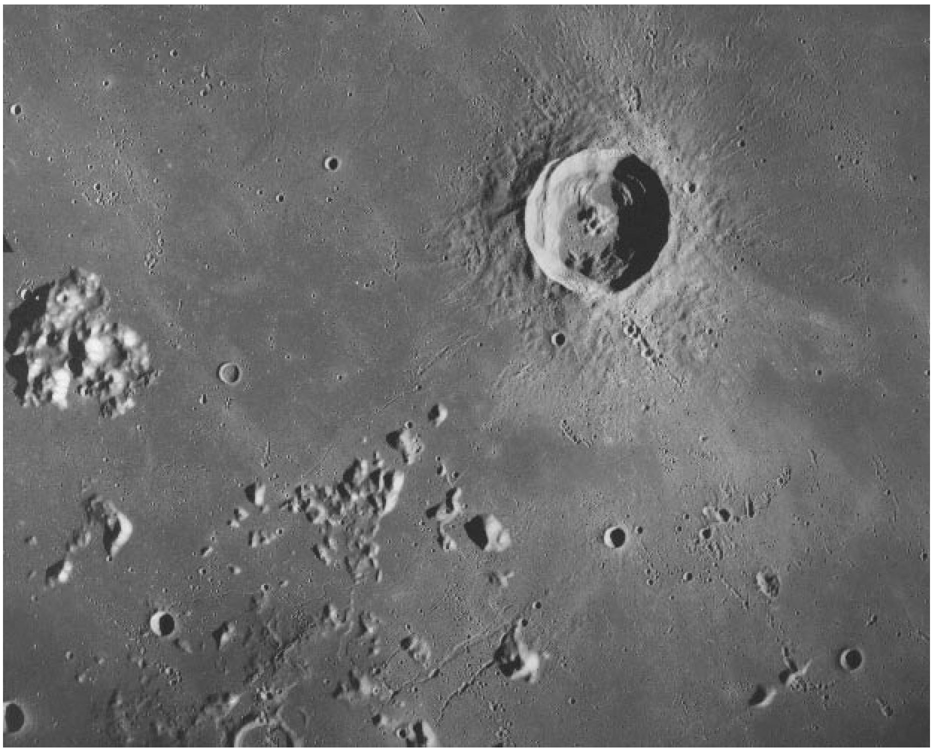
> Hace cuatro mil millones de años un gigantesco asteroide impacto con la Luna produciendo un enorme cráter de 1250 kilómetros de diámetro; nuestro satélite estuvo a punto de desaparecer, pero sobrevivió al tremendo impacto.
>
> Quinientos millones de años más tarde grandes coladas de lava habían rellenado este cráter y destruido alguna de sus paredes. Había nacido el *Mare Imbrium*, el mar de las Lluvias.
>
> Sobre este fondo de lava otros objetos celestes dejaron su huella en forma de impacto. Uno de ellos produjo un cráter mediano de poco más de 28 kms de diámetro y dos mil quinientos metros de profundidad, al norte de los Montes Cárpatos. El cráter Euler. No es uno de los más grandes, el cráter Newton tiene un diámetro de más de 79 kms, el de Arquímedes 82 y el Gauss más de 175...

La asignación de los cráteres lunares a grandes matemáticos y científicos no sigue una ley de proporcionalidad directa entre el impacto de sus aportaciones a la historia de las matemáticas y el diámetro del cráter producido tras el choque de un meteorito.

Porque, Leonhard Euler, y no sólo por la cantidad de sus obras, sino sobre todo por su calidad, está entre los cuatro o cinco matemáticos más importantes de la historia; "leed a Euler, es el maestro de todos nosotros" aconsejaba nada menos que Pierre-Simon de Laplace a los matemáticos del finales del siglo XVIII.

En el siglo XVIII los campos que abarcaban las Matemáticas eran mucho más amplios que en la actualidad. Los enciclopedistas dividen las Matemáticas en tres ramas principales: Matemáticas Puras, Físico-Matemáticas y Matemáticas Mixtas. Dentro de las Matemáticas Puras estarán la Aritmética y la Geometría. La Aritmética se divide en Aritmética Numérica (Teoría de Números) y Álgebra, que englobará el Álgebra elemental, el Álgebra Infinitesimal y el Cálculo Diferencial e Integral. De la rama de la Geometría surgen brazos como la Geometría Elemental y la Geometría Trascendente que englobarán disciplinas como la teoría de cuerpos y figuras junto a otras tan ajenas hoy al quehacer matemático como la Táctica o la Arquitectura Militar. El panorama dentro de la rama de las Matemáticas Mixtas es mucho más complicado y sorprendente para nuestros ojos ya que engloba disciplinas como la Mecánica, la Estática, la Hidrostática, la Dinámica, la Óptica, la Neumática o la Geometría Astronómica.

(*) IES Salvador Dalí. Madrid.



El cráter Euler. *Apollo 17 Metric photograph AS17-29223*

Si algo no le faltaba a un matemático profesional del Siglo de las Luces eran áreas del saber donde desarrollar su trabajo. El nombre de Euler aparecerá ligado a todas esta áreas científicas., en obras y trabajos no sólo de lo que hoy entendemos por materias matemáticas: Teoría de Números, Algebra, Análisis, Geometría... que de hecho constituyen, según la estadística elaborada por Adolf Juschkewitsch sobre la obra de Euler, sólo el 58% de sus trabajos. Las obras sobre Mecánica y Física constituyen el 28% de su producción total, sobre Astronomía el 11%, sobre Náutica, Arquitectura y Artillería el 2% y sobre Música y Filosofía el 1%. Y de hecho, de los más de 87 volúmenes de su ingente *Opera Omnia*, sólo 29 constituyen la *Opera Mathematica*.

UN JOVEN SUPERDOTADO

El azar marca nuestras vidas. Y la del joven Euler, matriculado en la universidad de Basilea por su padre, para estudiar teología, humanidades clásicas y lenguas orientales estuvo marcado por el hecho trascendental de conocer y hacerse amigo de los hermanos Daniel y Nicolás, los hijos del arrogante pero genial Johann Bernoulli. Éste, poco dado a valorar méritos ajenos, reconoció sin embargo desde el principio el talento del joven Euler, y, además de darle unas especiales clases particulares, debió mediar ante su padre para que estudiase una carrera de carácter científico en lugar de teología.

El propio Euler lo cuenta en su autobiografía:

> "Pronto tuve la oportunidad de ser presentado al famoso profesor Johann Bernoulli. Estaba realmente muy ocupado, y así rehusó de plano darme lecciones particulares, pero me dio en cambio consejos mucho más valiosos para comenzar a leer por mi propia cuenta libros de matemáticas más difíciles y estudiarlos con toda la diligencia que pudiera. Si me encontraba con algún obstáculo o dificultad tenía permiso para visitarle con plena libertad todos los sábados por la tarde..."

En la universidad de Basilea, como en casi todas de esa época la única opción de ciencias era medicina, en la que se estudiaba filosofía natural –física– y matemáticas. Euler fue sin duda la única persona a la que Johann Bernoulli reconocería una mente superior a la suya.

Comenzó a publicar con tan solo 19 años, su primera memoria *Constructio lincarum isochronarum in medio quocunque resistente* impresionó a Johann Bernoulli. Quizás animado por él, Euler, que no había visto un barco de vela en su vida, presentó a la Academia de París, con tan solo veinte años, una memoria sobre la distribución óptima de mástiles y velas en los barcos. En esta ocasión no obtuvo el premio que concedía la Academia, tan sólo una mención honorífica. Pero la Academia acabaría rendida a los méritos de Leonhard concediéndole hasta doce premios a lo largo de su vida.

Ese mismo año, 1727, recién cumplidos los 20, Euler opta a la cátedra de filosofía natural de la universidad de Basilea, con un trabajo sobre el sonido, *Dissertatio physica de sono*, pero es rechazado por su juventud. Y otra vez los hermanos Bernoulli marcarán el rumbo de su vida, invitándole a incorporarse con ellos a la Academia de San Petersburgo. Justo el día en que Euler llega a San Petersburgo, el 27 de mayo de 1727, muere Catalina la Grande, la protectora de la Academia. Su sucesor, Pedro II, no compartía esta vocación de mecenas de las ciencias y Euler para sobrevivir tuvo que enrolarse en la marina rusa en la que durante tres años ocupo el grado de teniente de navío.

Por suerte para la ciencia Pedro II duró poco en el trono y en 1730 le sucede su hija Ana que relanza la Academia. Euler tiene 23 años y obtiene la cátedra de física. La marina rusa perdió un buen teniente pero la ciencia recuperó a uno de sus genios más prolíficos. En 1733, tras la marcha de Daniel Bernoulli, ocupa su plaza en la cátedra de matemáticas, su gran sueño.

LA MENTE MÁS CREATIVA

La pluma de Euler durante los 14 años que va a durar su primera estancia en San Petersburgo no va a tener ni un día de descanso. En esos años publicará más de 100 memorias y artículos sobre los temas más diversos, (la gran mayoría de los artículos de los *Comentarii* de la Academia corresponden a Euler), y su primera obra cumbre: *la Mechanica* (1736), dos tomos con más de 1000 páginas, la primera obra en que la mecánica parece tratada de forma analítica y con los términos actuales. Ese mismo año publicará el breve artículo *Solutio problematis ad geometrian situs pertinentes*, el famoso problema de los puentes de Königsberg, origen de la teoría de grafos.

En esta época nace la fiebre y el amor de Euler por las series infinitas y sus increíbles e ingeniosos métodos para abordarlas.

En 1729 define y estudia las funciones gamma y beta que desde entonces llevan su nombre

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx \quad \text{con } s > 0 \qquad\qquad \mathrm{B}(s, t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\, dx \quad \text{para } s, t > 0$$

y descubre su principales propiedades:

$$\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s); \qquad \Gamma(n+1) = n! \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}; \qquad \mathrm{B}(s, t) = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(v)}{\Gamma(s+v)}$$

En la década entre 1730 y 1740 se enfrenta a su gran pasión: la suma de series numéricas llamativas. Aplicando técnicas, hoy criticables en cuanto al rigor, pero llenas de originalidad y valentía adornadas con una buena dosis de ingenio y habilidad para combinar resultados de ramas en apariencia muy distantes de las matemáticas, como análisis y aritmética, Euler consigue resultados espectaculares como este:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

O este otro, la suma de los inversos de las potencias cuartas de los números naturales

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}$$

O los correspondientes a la suma de los inversos de los cuadrados de los números impares

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

O de las diferencias alternadas de otras potencias

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{32}\ ; \qquad 1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96}$$

Pero sin duda la joya de la corona de sus cálculos de series, es la respuesta al gran problema planteado varios años antes por Jakob Bernoulli, el que se dio en llamar el problema de Basilea, que no es otro que calcular la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots =$$

Euler había conseguido aproximaciones calculando hasta los mil primeros términos:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2} = 1{,}64393$$

En 1735, con su genial manera de relacionar técnicas y resultados de campos matemáticos distantes va a encontrar el resultado:

> "Sin embargo, he encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc…, que depende de la cuadratura del círculo (es decir, de π). He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia de un círculo de diámetro 1".

Y en efecto, la suma de la serie es

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Todos estos resultados los incorporará al capítulo X del tomo primero de la *Introductio In analysin infinitorum*[1]

lem. Quo autem valor harum ſummarum clarius perſpicia- CAP. X.
tur, plures hujuſmodi Serierum ſummas commodiori modo expreſſas hic adjiciam.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\&c.=\frac{2^0}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1}\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\&c.=\frac{2^2}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\&c.=\frac{2^4}{1.2.3....7}\cdot\frac{1}{3}\pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\&c.=\frac{2^6}{1.2.3....9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\&c.=\frac{2^8}{1.2.3.....11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\&c.=\frac{2^{10}}{1.2.3.....13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12}$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\frac{1}{5^{14}}+\&c.=\frac{2^{12}}{1.2.3.....15}\cdot\frac{35}{1}\pi^{14}$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\frac{1}{5^{16}}+\&c.=\frac{2^{14}}{1.2.3.....17}\cdot\frac{3617}{15}\pi^{16}$$

$$1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\frac{1}{5^{18}}+\&c.=\frac{2^{16}}{1.2.3.....19}\cdot\frac{43867}{21}\pi^{18}$$

$$1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\frac{1}{5^{20}}+\&c.=\frac{2^{18}}{1.2.3....21}\cdot\frac{1222277}{55}\pi^{20}$$

$$1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\frac{1}{5^{22}}+\&c.=\frac{2^{20}}{1.2.3...23}\cdot\frac{854513}{3}\pi^{22}$$

$$1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\frac{1}{5^{24}}+\&c.=\frac{2^{22}}{1.\,2.\,3.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,25}\cdot\frac{1181820455}{273}\pi^{24}$$

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\frac{1}{5^{26}}+\&c.=\frac{2^{24}}{1.\,2.\,3.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,27}\cdot\frac{76977927}{1}\pi^{26}.$$

Hucuſque iſtos Poteſtatum ipſius π Exponentes artificio alibi exponendo continuare licuit, quod ideo hic adjunxi, quod

R 2 Seriei

La pérdida de un ojo motivada por las observaciones sobre las manchas solares con el objeto de presentar sus resultados a un premio de la Academia de Ciencias de París, no frenará su producción científica. Su memoria increíble –parece cierta la anécdota de que era capaz de recitar completa *la Eneida* en latín y además decir la primera y la última línea de cada una de las páginas de la edición que había leído– y su enorme capacidad de cálculo –podía decir, calculando mentalmente, hasta las potencias sextas de los 100 primeros números naturales–, junto a su capacidad de interrelacionar ramas muy dispares de las matemáticas para atacar un mismo problema, van a paliar esta dificultad.

En esta época Euler se enfrascó en la ardua tarea de demostrar todos los retos planteados por Fermat y cuyas soluciones obvió o al menos no publicó nunca, sobre aritmética de números naturales; parece que llegó a ser un manía obsesiva hasta el punto de encargar la compra de todos los legajos por el matemático francés que se pudiesen encontrar en Toulouse. Sus prodigiosas dotes de cálculo le permitieron resolver con éxito casi todos los grandes retos, descubriendo de paso alguno de sus errores.

Así descubrió que el quinto primo de Fermat: $F_5 = 2^{2^5} + 1$, no era un número primo, en contra de lo afirmado para todos estos números por el matemático francés. Aunque la descomposición no es nada simple, sobre todo si no se cuenta con las poderosas herramientas de cálculo actuales: $F_5 = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6700417$.

En 1736 publicara la primera demostración del Pequeño Teorema de Fermat.

Si $p > 0$ es primo, entonces p divide a $a^p - a$

De este resultado dará a lo largo de su vida otras dos demostraciones, la última en 1768.

Euler no se podía resistir a la tentación de demostrar el Último Teorema de Fermat y de hecho siguiendo el método de descenso infinito del propio Fermat, consiguió las demostraciones para $n = 3$ y $n = 4$

EN LA ACADEMIA DE BERLÍN

A finales de 1740, tras la muerte de la zarina Ana, a Euler se le vuelve a plantear la misma situación de incertidumbre sobre su futuro que trece años antes, pero ahora tiene una familia que mantener y sobre todo un prestigio enorme en toda Europa. Así que aceptará la oferta de Federico II para incorporarse a la cátedra de física de la Sociedad Científica de Berlín, germen de la futura Academia de Ciencias berlinesa. En Berlín continuará con su gran afición a la astronomía. Buena prueba de ello es la obtención del premio de la Academia de París en 1748 por un trabajo sobre las perturbaciones del movimiento de Júpiter y Saturno.

Durante el cuarto de siglo que duró su estancia en Berlín Euler continuo con su producción febril, seguirá mandando regularmente artículos para los *Comentarii*, la revista de la Academia de San Petersburgo de la que continuó siendo editor, enviará en total más de 100, casi tantos como los que publicará en las Memorias de la Academia de Berlín –127–; investigará sobre todos los temas matemáticos del momento y publicará cientos de memorias y de artículos, pero de este época, de su primera década en Berlín, data uno de los mejores regalos del genio de Basilea a la historia de las matemáticas, su *Introductio in analysin infinitorum*, (1748), el nacimiento oficial de las funciones, uno de los libros de matemáticas más influyentes de todos los tiempos. Como dice Wiliam Dunham, en su obra Euler, el maestro de todos los matemáticos:

> "Antes de Euler, el análisis trataba de las propiedades de las curvas; después de él, sobre las propiedades de las funciones. El cambio es profundo y alteró el paisaje matemático para siempre".

Cuatro años antes, en 1744, había publicado su primera visión del cálculo de variaciones, *Methodus inveniendi lineas curvas...* , y la *Theoria motuum planetarum y cometarum*. Dos años más tarde su *Teoría sobre la luz y el color*. Su ritmo de producción se mantiene a un nivel inusitado.

Durante la década de los 50 hasta el final de su estancia berlinesa ven la luz al menos otra veintena de obras cumbres en sus respectivos campos. No podemos citar todas aquí pero destacaremos alguna: su segunda mecánica, *Theoria motus corporum solidorum* (1765)..., *Recherches sur la la courvature des surfaces* (1760), *Institutiones calculi differentialis* (1755) y aunque menos extensa, no la de menor repercusión posterior, su obra clásica sobre los logaritmos de números negativos e imaginarios *De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli sur les logaritmes de nombres negatifes e imaginaires* (1751), donde deja despejado el camino para justificar la existencia y el cálculo de logaritmos naturales de números imaginarios, utilizando la sorprendente expresión que, desde entonces lleva su nombre, la identidad de Euler:

Para cualquier x real, $e^{ix} = \cos x + i\, sen x$

Según Euler, las propiedades de los logaritmos se mantienen para los números negativos, en contra de la opinión de Leibniz, es decir: $\ln(-x) = \ln[x \cdot (-1)] = \ln x + \ln(-1)$

La clave estaba en la constante ln(-1). Para Bernoulli esta constante valía cero. Pero Euler tenía la llave desde la *Introductio*. Haciendo en su identidad $x = \pi$, obtiene $e^{i\pi} = \cos \pi + i\, sen \pi = -1$ y, por tanto, $\ln(-1) = i\pi$

Es decir, $\ln(-x) = \ln x + \ln(-1) = \ln x + i\pi$

Para sorpresa de todos, los logaritmos de los números negativos no sólo existen sino que además son números imaginarios.

En el caso de los logaritmos de los números imaginarios la solución es más sorprendente, no sólo existe el logaritmo de un complejo $a+bi$, sino que hay infinitos logaritmos. Si c es el módulo del complejo y θ su argumento, Euler afirmó que

$\ln(a + bi) = \ln c + i(\theta \pm 2k\pi)$ para k = 0, 1, 2, ...

Habían nacido para la historia de las matemáticas los logaritmos complejos. Y de paso había dotado de carta de identidad definitiva a los números complejos, explicando cómo operar con ellos, cómo calcular sus raíces, sus potencias, sus logaritmos, sus senos y cosenos.

No deja de ser un nota reveladora del carácter de Euler la carta dirigida a Golbach en la que eufórico le comunica su cálculo de $z = i^i$

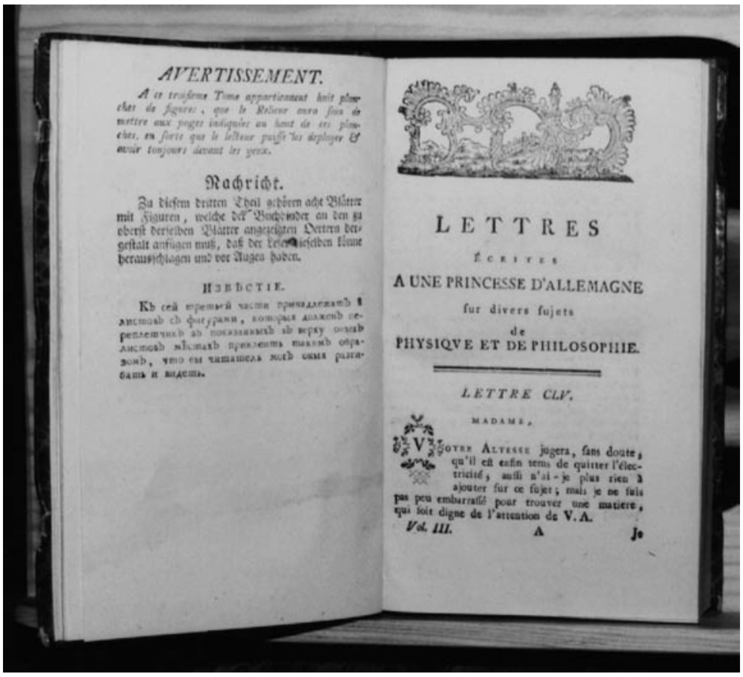
Tomando logaritmos: $\ln z = \ln(i^i) = i \cdot \ln i = i \cdot \left[0 + i\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)\right] = -\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$

Así que $z = i^i = e^{\ln z} = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot e^{2k\pi}$

¡¡Infinitos valores reales diferentes!!. Para $k = 0$ $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = \sqrt{e^{-\pi}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}} = 0{,}2078795$

"¡Lo que me parece extraordinario!", afirmaba Euler en su carta. Y no es para menos.

Pero sería injusto despedir a Euler de Berlín sin citar lo que seguramente constituye una de las primeras obras de divulgación científica, nacida con ese fin, de la historia: *Las cartas a una princesa sobre diversos temas de Física y de Filosofía*(2), escrita en tres volúmenes entre 1760 y 1762 y publicada unos años más tarde en San Petersburgo. Son las lecciones impartidas por Euler a su llegada a Berlín a la princesa Federica, sobrina del rey de Prusia. Es la primera enciclopedia divulgativa de carácter científico abordando temas de física, astronomía, óptica, acústica, mecánica, cosmología y moral. Fue durante muchos años la única obra de Euler traducida al castellano.



DE NUEVO EN SAN PETERSBURGO

El carácter discreto, retraído y familiar no le hacía encajar bien en la corte de Federico II, un monarca engreído y pedante, amante de fastos y boatos, justo lo contrario de Euler. Así que en el verano de 1766, un tanto cansado del desprecio del monarca, Euler, el cíclope geómetra, como con pésimo gusto, le llamaba Federico, decide volver a San Petersburgo con cuya Academia había estado profundamente vinculado durante toda su estancia berlinesa.

El trato que le dispensó Catalina II de Rusia fue todo lo contrario. Dispuso para él y su familia, 18 miembros en total, una enorme mansión y puso a su disposición a su mejor cocinero. Esto debió consolarle del golpe que debió suponer la pérdida de todos sus objetos personales y numerosos escritos sin publicar que se perdieron en el naufragio del barco que los transportaba desde Alemania. Para colmo una catarata en el ojo izquierdo comenzó a hacerle perder progresivamente la visión de su ojo sano. Su casa, junto a otras 500, fue víctima de un incendio que casi siega su vida y en el que volvió a perder una buena parte de sus manuscritos, entre ellos su memoria sobre la Luna. En 1776, viejo y casi ciego pierde a su esposa, aunque al año siguiente se casa con su cuñada. A pesar de todos estos percances vitales Euler continuo con su producción febril. En esta etapa publicó más de 350 trabajos, muchos de ellos sobre su gran afición: la teoría de números en la que nos ha dejado magníficos resultados sobre números perfectos (el teorema de Euclides-Euler), sobre números amigos (sus famosas 62 parejas que al final fueron sólo 60), sobre números primos...

En 1768 apareció su *Aritmética Universal*. En ella se analizan un sin fin de resultados elementales de forma muy didáctica: se generalizan las reglas de resolución de problemas aritméticos; se desarrolla el aparato simbólico-literal del álgebra; se aclaran las operaciones con números, monomios, radicales y complejos; se introducen los logaritmos; se dan las reglas de extracción de las raíces de números y de expresiones algebraicas polinomiales; se introducen las series como medio de expresión de las funciones racionales fraccionarias; se introducen los números poligonales, las proporciones y progresiones, las fracciones decimales periódicas y se estudian los métodos de resolución de ecuaciones algebraicas. Hoy nos sorprende su contenido por la similitud de los temas con los de cualquier currículo de matemáticas de educación secundaria. Incluso el suyo es en algunas partes más moderno que algunos de los nuestros de las últimas décadas.

Entre 1768 y 1770 verán la luz los tres tomos de las *Instituciones calculi integralis*, donde presenta su visión analítica del cálculo de variaciones, entre 1769 y 1771 los tres tomos de la *Dioptrica* y en 1774 su segunda *Scientia navalis* menos teórica y mucho más práctica que la publicada en 1749.

Ya totalmente ciego publica en 1770 su *Introducción al Álgebra* dictándole sus cálculos a su ayudante Peter Grimm, que no tenía una formación matemática especial. Las correcciones las realizaba su hijo Johann Albercht. Su estilo didáctico ha constituido un modelo desde entonces. Tras la edición de este libro, Euler descubre la necesidad de contar con un secretario con una formación matemática sólida y pide a Daniel Bernoulli que le envíe uno de sus alumnos más aventajados, Así es como Nicolás Fuss, un estudiante de la universidad de Basilea tendrá la fortuna de compartir día a día los últimos diez años de creación matemática del genio. A lo largo de toda su vida y en todas sus obras, Euler se manifiesta con un estilo claro, llano y sencillo, alejado de la pedantería que rodea muchas publicaciones científicas; porque Euler fue también un maestro y un divulgador fabuloso. Condorcet lo expresa de manera precisa:

> "Cuando publicaba una memoria sobre un asunto nuevo, exponía con sencillez el camino que había recorrido, haciendo observar sus dificultades y vericuetos, y tras hacer seguir al lector la marcha de su espíritu durante los primeros ensayos, les enseñaba cómo había conseguido encontrar el camino más fácil, lo que demuestra que prefería la instrucción de sus discípulos a la satisfacción que pudiera producirle su asombro, y creía no hacer bastante por la ciencia si no agregaba a las verdades nuevas con que la enriquecía, la sincera exposición de las ideas que le habían conducido a su descubrimiento".

Gracias a Nicolás Fuss conocemos sus últimas horas:

> "Esos vértigos fueron el anuncio de su muerte, ocurrida el 7 de septiembre. Ese mismo día, conversó en la sobremesa con sobre el nuevo planeta –se refiere a Urano recién descubierto por Herschel– con M. Lexell, que había venido a verle, y más tarde nos habló de otros temas con su agudeza habitual. Acababa de ponerse a jugar con uno de sus nietos cuando sufrió un ataque de apoplejía. Antes de perder el conocimiento solo pudo decir "me muero"; y así terminó la gloriosa vida pocas horas más tarde".

O como indica el propio Condorcet en su *Éloge* de M. Euler:

> "El 7 de septiembre de 1783, [...] mandó llamar a su nieto, con el que se puso a jugar mientras tomaba el té, cuando de repente se la cayó la pipa de la mano, y cesó de calcular y de vivir".

REIVINDICACIÓN DE LA FIGURA DE EULER

La figura de Euler se hace gigantesca cuando exploramos en cualquier rama de las matemáticas. La cantidad y la importancia de sus descubrimientos nos hacen dudar a veces que puedan ser obra de una sola persona. Aunque Euler no era una persona normal, era un genio. Un genio al que muchos matemáticos actuales, haciendo caso omiso del contexto histórico y científico en el que desarrolla sus descubrimientos, critican de intuitivo y primitivo y carente del rigor necesario. Se olvidan de que, como los propios conceptos matemáticos, el concepto de rigor cambia con los tiempos.

Como dice Dunham, Leonhard Euler fue un inventor, un explorador y un artista. Con un entusiasmo inquebrantable se aventuró por zonas desconocidas; no del mundo físico sino del mundo interior. Como ocurrió con los grandes exploradores, de vez en cuando tomó el camino equivocado y se olvidó de alguna referencia importante. Sin embargo Euler se merece nuestra total admiración. Trabajando en la semioscuridad, y sólo con el poder de su inigualable imaginación, llegó hasta las fronteras de las matemáticas y aún más allá.

Hoy, en cualquier camino matemático que sigamos nos encontraremos tarde o temprano con él, con sus resultados: relación de Euler de los poliedros convexos, teoría de grafos, recta de Euler, constante de Euler, funciones, logaritmos, variable compleja... Y si no aparece alguno de sus resultados compartiremos con él, ignorándolo muchas veces, alguna de sus omnipresentes notaciones: *f(x), e,* π*, i, ...*

De hecho Euler está presente, como si de un guiño de la naturaleza se tratase en la relación más hermosa de las matemáticas; una relación que liga de forma sutil las cinco constantes numéricas universales más populares, los números *0, 1,* π*, e, i*. Y que es el compendio de todo el Análisis. Una relación, por supuesto descubierta por el genial Leonhard Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Un homenaje que el Universo le hace a las Matemáticas a través de uno de sus hijos más ilustres.

BIBLIOGRAFÍA

Castro Chacid I., 1996: *Leonhard Euler*. Grupo Editorial Iberoaméricano. México D.F.

Dunham, William, 2000: *Euler el maestro de todos los matemáticos*. Ed. NIVOLA. Madrid.

Dunham, William, 1993: *Viaje a través de los genios*. Ed Pirámide. Madrid.

Durán A. J., 1996: *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Alianza Univ. Madrid.

Sánchez, C. y Valdés C., 2004: *De los Bernoulli a los Bourbaki.* Ed. NIVOLA Madrid.

Pérez Sanz, 2001: *A. Euler. Una superestrella*. Documental serie Universo matemático. RTVE.

NOTAS

(1) Edición facsimil y comentada de la SAEM Thales y la RSME. Sevilla 2000.

(2) *Reflexiones sobre el espacio, la fuerza y la materia.* Leonhard Euler. Alianza Editorial. Madrid, 1985.