RIEMANN, UN MATEMÁTICO GENIAL

JOSE LUIS MUÑOZ CASADO (*)

BIOGRAFÍA

Bernhard Riemann nace en un pueblecito del antiguo reino de Hanover llamado Breselenz el 17 de septiembre de 1826. Sus inicios no fueron nada fáciles, su padre, pastor luterano, intenta sacar adelante a su familia como puede. Riemann es el segundo de seis hermanos: dos chicos y cuatro chicas.

B. Riemann

Dado el carácter religioso de su padre, Riemann crece en un ambiente familiar muy intenso que marcará toda su vida. En 1833 la familia se traslada a la parroquia de Quickborn, situado cerca del río Elba. Es aquí donde Riemann comienza sus primeros pasos escolares. En un principio son sus padres los encargados de su educación, tanto en humanidades como en ciencias, pero el talento de Riemann comienza a despuntar rápidamente y su padre no tiene más remedio que confiar su educación a un profesional, el profesor Schulz. Con tan solo diez años, Riemann dominaba gran parte de los problemas de aritmética superior así como muchos conceptos de geometría analítica.

A los catorce años es confirmado por su propio padre y enviado con su abuela a la ciudad de Hanover con la idea de estudiar la educación secundaria. Dos años después muere su abuela y Riemann se traslada a Lüneburg donde asiste al Gymnasium Johanneum. Allí se encuentra solo y es hospedado por el profesor Seffer.

Esta etapa resulta muy difícil para Riemann, la separación de su familia es dura y algunas veces, llevado por la nostalgia, recorre a pie los cincuenta kilómetros que separaban Lüneburg y Quickborn. Esta nostalgia es superada con la inestimable ayuda del profesor Seffer que aparte de alojarle en su casa también le ayudó con los estudios. Muchas veces la excesiva autocrítica y perfeccionismo de Riemann le impedían entregar sus trabajos a tiempo. El profesor Seffer pacientemente le ayudaba a preparar sus trabajos e incluso a mejorar su retórica.

En 1843 muere el director del Johanneum siendo su sustituto el profesor Schmalfuß. Este cambio supuso un giro inesperado en la vida de Riemann. Schmalfuß era matemático de profesión y no tardó mucho en percibir su talento para esta disciplina. En las obras completas de Riemann puede verse una carta del director Schmalfuß a Schering (profesor en Göttingen) que describe perfectamente los años de Riemann en Lüneburg.

> "Él, como un chico de entre 11 y 12 años, hablaba con sus compañeros de los regalos de Navidad que querían hacer a sus padres. Ellos, que aprendieron papiroflexia, querían hacer "ejemplos" para demostrar su talento. Cada chico realizó una cosa.
>
> Yo, dijo Riemann: he inventado un calendario siempre válido.
>
> Se rieron de él, pero él terminó su obra, no solo fascinando a sus amigos sino también causando perplejidad en los mayores. Este calendario no fue, según me comentaron, una imitación, sino un trabajo que el mismo había inventado."

(*) Profesor de Matemáticas del IES Salvador Dalí. Madrid.

Riemann comienza a despuntar, y el profesor Schmalfuß, consciente de eso, se dedica a prepararlo para unos futuros estudios universitarios. En 1845 con diecinueve años Riemann parte para Göttingen, donde se encuentra la universidad más cercana. El marcado ambiente religioso de su familia hace que Riemann inicie sus estudios universitarios en Filosofía y Teología siguiendo los deseos de su padre.

Pero Riemann poseía un gran nivel en matemáticas gracias al profesor Schmalfuß y no puede evitar asistir a algunas clases de esta disciplina. Una de estas clases fueron las impartidas por Gauss, lo que parecía al principio un pasatiempo se convierte en una necesidad y Riemann no duda en escribir a su padre pidiendo permiso para cambiar sus estudios de Filosofía y Teología por los de Matemáticas. Su padre tuvo que reconocer la evidencia del talento matemático de su hijo y aceptó el cambio.

Habían pasado casi dos años cuando por fin pudo dedicarse enteramente a las matemáticas. En estos dos años Riemann se percató de que el estilo de las matemáticas de la Universidad de Göttingen no era muy vanguardista. A principios de 1847 decide viajar a Berlín, donde se encuentran matemáticos de la talla de Dirichlet y Jacobi que promueven unas matemáticas más cercanas al estilo de Riemann. Pero, ¿cuál es su estilo? Leyendo sus trabajos se puede observar que Riemann casi siempre prefiere inventar antes que entrar en tediosos cálculos y comprobaciones, y ésta es precisamente su forma de hacer matemáticas, Riemann practicó unas matemáticas imaginativas, unas matemáticas muy por delante de su tiempo, basta mencionar como resolvió el problema de la multievaluación de las funciones de variable compleja, creando las Superficies que hoy en día llevan su nombre, Superficies de Riemann.

Durante su estancia en Berlín aprendió teoría de números, integrales definidas y ecuaciones diferenciales de mano de Dirichlet, de Jacobi tomó los cursos de mecánica analítica y álgebra superior y de Eisenstein tomó cursos de integrales elípticas. Con éste último mantenía frecuentes conversaciones acerca del método a seguir en matemáticas. Eisenstein era un tradicionalista y defendía unas matemáticas sintéticas. Quizás estas discusiones ayudaron a forjar más aún el espíritu innovador de Riemann.

Pero en aquellos años Berlín era una ciudad inestable, la corriente reformista iniciada en la revolución francesa aterriza en la ciudad y Riemann se ve involucrado en revueltas estudiantiles. Tuvo que elegir un bando y se unió a los estudiantes conservadores, que para comprobar su lealtad le pidieron realizar dieciséis horas de guardia delante del palacio real.

La preocupación de su padre aumenta y en numerosas cartas le pide que vuelva a Göttingen. Riemann, consciente de la realidad, decide regresar en 1849. A su vuelta las cosas habían cambiado y un hecho que redirigió el rumbo de sus investigaciones fue la incorporación de Wilhelm Weber después de sus años de exilio(1). Movido por la indudable valía científica de Weber se siente atraído por la Física. Después de haber conocido los trabajos sobre ecuaciones diferenciales de Dirichlet, Riemann se dedica a investigar la fuerza gravitacional y la fuerza eléctrica, su intuición le dice que no son tan diferentes.

Se puede decir que es en esta época donde Riemann comienza a pensar en una teoría que explicase ambas fuerzas, como dos caras de una misma moneda.

El estudio de la fuerza gravitacional le lleva irremediablemente a la función potencial ampliamente estudiada por Lagrange y Laplace, Riemann aprecia perfectamente la relación de esta función con las funciones de variable compleja adentrándose en el terreno de la física matemática.

Con estas ideas en la cabeza presenta en 1851 y ante Gauss su tesis doctoral, un estudio completo de las funciones de variable compleja partiendo de su nueva definición. El estudio de las funciones de variable compleja desde un punto de vista conceptual, le llevó a caracterizar las funciones por sus propiedades y las funciones complejas tienen una propiedad fundamental y que Riemann supo ver perfectamente: la representación conforme, dicho en palabras de Gauss "la posibilidad de representar las partes de una superficie dada de tal forma que la representación sea original en sus partes más pequeñas".

Riemann enuncia el teorema de aplicación conforme apoyándose en el principio de Dirichlet, ampliamente cuestionado y refutado tajantemente por Hilbert a final de siglo.

Gauss supo ver la profundidad de las ideas que Riemann presentó y tras la lectura redactó el siguiente informe:

> "La disertación presentada por Herr Riemann ofrece pruebas convincentes de que ha realizado detenidas y penetrantes investigaciones en aquellas partes del tema tratadas en la disertación, de que posee una mente creadora activa, verdaderamente matemática y de que es dueño de una gloriosa y fecunda originalidad. La presentación es notable y concisa y en algunos puntos bella. La mayoría de los lectores podría preferir mayor claridad en el orden. En conjunto es una obra de valor substancial, que no sólo satisface las exigencias de las disertaciones doctorales sino que las supera".

Riemann ya es doctor y Gauss le recomienda que adquiera la condición Privadozent, condición que le permite dar clases en la universidad y recibir el dinero de las matriculas de sus alumnos. Riemann consciente de los apuros de su familia decide aceptar la recomendación de Gauss. Pero la física es una tentación demasiado grande, unido a la creación alrededor de 1850 de un seminario físico matemático por parte de Weber y Listing hacen que Riemann pierda un poco el objetivo de Privadozent en detrimento de sus ideas físicas.

Tanto es el interés que Riemann pone en este seminario que en 1853 se convierte en ayudante de Weber, preparando las prácticas para los nuevos alumnos y dando ocasionalmente alguna clase teórica. La participación en el seminario no hizo otro cosa que aumentar la convicción de Riemann de una posible teoría que explicase los fenómenos eléctricos, magnéticos y gravitacionales. A principios de 1853 Riemann tiene tan avanzadas sus investigaciones que prepara un artículo para su publicación. El título, en clara alusión a los Principia de Newton, es: "Nuevos principios matemáticos de la filosofía natural".

En este artículo, que no llegó a publicar por discrepancias con la editorial sobre ciertos cambios que no estaba dispuesto a realizar, Riemann propone una reformulación de las leyes físicas que Newton estableció en su época. La visión que Riemann propone no solo estaba basada en sus conocimientos físicos y matemáticos sino también en profundas reflexiones filosóficas que llevó a cabo en esta época, no olvidemos sus inicios universitarios estudiando Filosofía y Teología.

Por fin, en 1854 consigue la condición de Privadozent, para ello tuvo que presentar una segunda tesis y dar una lección inaugural ante un tribunal con el objetivo de demostrar su valía como profesor.

Para la lección inaugural tuvo que entregar tres temas, de los cuáles el tribunal elegiría uno. Riemann tenía ya preparado dos pues estaban relacionados con sus investigaciones; "representabilidad de una función mediante series trigonométricas" y "resolución de dos ecuaciones de segundo grado con dos cantidades indeterminadas". El tercero decidió titularlo "Sobre las hipótesis en las que se funda la geometría" sin prestar mucha atención pues era costumbre del tribunal elegir siempre el primero de los tres temas propuestos.

Pero en el tribunal estaba Gauss, y atraído por el título eligió el tercero contra todo pronóstico. Riemann tuvo que trabajar intensamente para preparar la lección, pues no contaba con esa decisión. Además debió sentir la presión del todopoderoso Gauss, pues en una institución tan tradicionalista como la universidad, la elección del tercer tema propuesto le hacía pensar que quizás Gauss ya tuviese su propia opinión del tema y por este motivo eligió la tercera propuesta.

El 10 de Junio de 1.854 en el Colloquium de la facultad de filosofía de Göttingen, Riemann presenta su lección inaugural. El texto que Riemann presentó al tribunal esta considerado como una obra maestra tanto por su redacción, simple y sin demasiados abalorios algebraicos (apenas aparecen fórmulas), como por la profundidad de sus ideas. Riemann puso particular empeño en que la lección fuera inteligible para cualquier miembro del tribunal, no siendo necesario ser matemático ni poseer grandes conocimientos.

Su nueva teoría de variable compleja le conduce irremediablemente a las investigaciones que presenta en la lección inaugural, las recién creadas Superficies de Riemann exigen una nueva forma de pensar a la hora de estudiar geometría.

Riemann ya está preparado para dar clase. El verano de 1854 lo pasó en Quickborn con su familia, descansando. A la vuelta, en septiembre, comienzan sus clases no muy esperanzado. Pero se lleva una grata sorpresa al tener ocho alumnos, él no esperaba más de tres o cuatro. Comienza una etapa de tranquilidad que Riemann describe en una carta fechada el 18 de Noviembre a su padre:

> "Mi vida ha tomado aquí poco a poco un hábito constante. Mis clases las estoy dando con cierta frecuencia superando así mi timidez, acostumbrándome a pensar más en los oyentes que en mi mismo, y a leer en sus caras si puedo avanzar o si tengo que detenerme para explicar en detalle un tema".

En 1855 Gauss muere y provoca toda una crisis institucional en la Universidad, su principal valuarte desaparece, era necesario buscar a alguien de su misma valía. Se propone a Dirichlet, el cual acepta. En aquellos momentos se encontraban en Göttingen Dirichlet, Dedekind y Riemann. Tres buques insignia que pronto provocarían una avalancha de estudiantes de matemáticas, siendo esta época el inicio de la edad dorada de Göttingen, que continuó con Klein, Dedekind y Hilbert entre otros.

Dirichlet y Dedekind (compañero de estudio y posteriormente su biografo) son los dos grandes amigos que Riemann tiene en Göttingen, no en vano, gracias a sus presiones consiguen que la universidad le ponga un sueldo. No era una gran cosa, 200 thaler anuales, el equivalente a unos 300 euros anuales, pero suficiente para la vida modesta que Riemann lleva.

La desgracia se cierne sobre su familia y en octubre de 1855 fallece su padre. Riemann se queda sin padres, su madre falleció cuando el era niño. Comienza una época oscura, desaparece el vínculo con Quickborn y sus tres hermanas se van a vivir con su hermano Wilhelm, que siendo funcionario postal ofrece mejores condiciones para mantener a la familia.

Al mismo tiempo comienza a escribir su famoso artículo "Teoría de las funciones abelianas", el esfuerzo requerido es tan grande que Riemann se hunde cada vez más en una depresión, solo piensa en sus clases y en sus investigaciones, su carácter tímido e introvertido se acentúa en esta etapa, que curiosamente coincide con una de sus momentos más creativos, desde el punto de vista matemático.

Por fin en 1857 publica el artículo. Dedekind, le sugiere realizar un viaje a Hazrburg para descansar. La familia de Dedekind posee una casa allí y él prepara todo para que Riemann se encuentre lo mejor posible. Escapándose de sus obligaciones como profesor en Brunswick, Dedekind consigue pasar algún tiempo con Riemann. En la biografía que Dedekind publica en 1892 relata los largos paseos que daban por los alrededores de Hazrburg hablando sobre cualquier tema.

Riemann mejora considerablemente su estado de ánimo, con la sorpresa de que a su vuelta es nombrado profesor asociado en la facultad de filosofía. Parece que después de la tempestad vuelve la calma, una calma muy fugaz porque a finales de 1857 su hermano muere y Riemann insiste en hacerse cargo de sus tres hermanas. Las desgracias no vienen solas y antes de partir a Göttingen su hermana pequeña, Mary, muere.

Riemann ve como su familia va desapareciendo poco a poco. Sin embargo, el hecho de vivir con sus dos hermanas y ver como la familia vuelve a estar unida junto al reconocimiento por parte de la universidad, hacen que supere por fin su depresión.

La fama de la calidad científica de los artículos de Riemann comienza a extenderse. La escuela politécnica de Zurich ofrece una plaza de profesor a Riemann y Dedekind y manda a Göttingen una delegación para evaluar a los candidatos. Los problemas de Riemann para exponer en público, la forma de escribir, densa y críptica hicieron que la delegación se decantase por Dedekind. Unos años más tarde Dedekind consuela a Riemann diciendo que ese trabajo no era para él, pues el nivel de alumnos era muy bajo, de hecho, el propio Dedekind deja ese puesto en 1862.

En otoño de 1858 recibe la visita de los matemáticos italianos Brioschi, Betti y Casorati interesados en los aspectos topológicos de los trabajos de Riemann. Es en este viaje cuando establece una estrecha relación con Betti, quién posteriormente le ofrecerá una cátedra en la universidad de Pisa.

A finales de este mismo año Dirichlet sufre un infarto. Riemann se queda muy preocupado por su amigo. La enfermedad de Dirichlet se agrava cuando el 1 de diciembre muere su esposa. Sumido en una depresión, Dirichlet fallece el 5 de mayo del año siguiente. Consciente de su muerte, Dirichlet dejó escrito que Riemann sería el candidato ideal para sucederle, y efectivamente, la universidad le designó para ocupar la cátedra de Matemáticas, convirtiéndose en 1859 y a la edad de treinta y tres años en el segundo sucesor de Gauss.

Esta cátedra supuso un reconocimiento a su labor y una aceptación de la comunidad matemática. Matemáticos de la talla de Weierstrass y Kummer, representantes de "la otra forma de hacer matemáticas", felicitaron expresamente su nombramiento. Riemann se traslada con el consentimiento de la Universidad al viejo observatorio astronómico, hogar de su maestro Gauss.

La Academia de Ciencias de Berlín lo nombra miembro en agosto de 1859, Riemann vuelve a Berlín aclamado por la plana mayor de los matemáticos alemanes: Borchardt, Kronecker, Weierstrass, Kummer. Como agradecimiento a la Academia y quizás como homenaje a su maestro Dirichlet, experto en teoría de números, Riemann escribe un artículo sobre Teoría de Números, su famoso "Sobre el número de números primos menores que una cantidad dada" que no deja indiferente a nadie.

Los trabajos de Riemann fueron siempre auténticas joyas matemáticas, pero su forma de escribir, densa y concisa, impidieron que sus trabajos fueran entendidos en su justa medida, la comunidad matemática necesitó unos años para asimilar todos los conceptos de las teorías de Riemann.

La fama de Riemann se extiende y a lo largo de los siguientes años es nombrado miembro de varias Academias de Ciencias, una de ellas fue la de París, por este motivó viajó allí donde conoce a Serret, Bertrand, Puisaux y Briot entre otros. En particular, conoce a Hermite ferviente admirador de su obra y autor en 1898 del prólogo de la traducción francesa de las obras completas de Riemann.

Dos años más tarde, en 1862, contrae matrimonio con Elise Koch , amiga de una de sus hermanas. Pero una vez más, hay contratiempos. En el verano de 1862 Riemann contrae pleuresía, enfermedad de la cual no consigue curarse definitivamente y que degenera en tuberculosis. Los médicos le recomiendan un clima más templado y sugieren que pase el invierno en Italia. La universidad le concede el dinero necesario para su estancia.

Riemann. En compañía de su mujer, se dedica a disfrutar de unos meses tras toda una vida de sacrificio y trabajo. Deciden establecerse en Sicilia donde pasan apaciblemente el invierno de 1862.

Su enfermedad, aunque mejora, no desaparece y tras su regreso a Göttingen vuelve a empeorar. Decide de nuevo viajar a Italia permaneciendo allí hasta mediados de 1865. Esta vez decide establecerse en Pisa, donde nace su única hija, Ida, nombre que elige en recuerdo de su hermana. La desgracia planea de nuevo y muere una de las dos hermanas que aún tenía.

La salud de Riemann mejora considerablemente, los largos paseos que realizaba junto a Betti producían un efecto muy beneficioso. La amistad con Betti se vuelve profunda y duradera y éste lo ofrece una cátedra de geodesia en la Universidad de Pisa, pero Riemann, en un ejercicio de honestidad, rechaza el ofrecimiento alegando que su estado de salud le impediría ejercer dicho cargo correctamente.

En octubre de 1865 Riemann regresa a Göttingen. El invierno es duro, y al año siguiente en un intento desesperado de mejorar su salud vuelve a viajar a Italia. Pero Riemann está ya agotado y fallece a orillas del lago Maggiore, en Selasca, el 20 de Julio de 1866.

LAS MATEMÁTICAS DE RIEMANN

Riemann llevó una intensa y corta vida matemática. El profesor Schmalfuß le introduce en el mundo de las matemáticas. Sus primeros años universitarios le ponen en contacto con los fundamentos de la Filosofía y más tarde Gauss le cautiva y desde sus primeras clases Riemann comprende que esta destinado a las matemáticas.

Sus inicios forjaron un matemático preocupado por la realidad física de la naturaleza, por cuestiones filosóficas relacionadas con el universo y su existencia, por comprender mejor un mundo eminentemente matemático.

Es en Berlín donde Riemann se encuentra con las matemáticas más modernas que se hacían en aquella época. Allí Dirichlet y Jacobi muestran una nueva forma de hacer matemáticas, ambos son matemáticos ya consagrados.

PRIMERA TESIS

Durante su estancia en Berlín Dirichlet le muestra el poder de las ecuaciones diferenciales, y su relación con algunos fenómenos físicos. A su vuelta, Weber había regresado y siendo experto en física enseña a Riemann, entre otras muchas cosas, las ecuaciones diferenciales del campo eléctrico y gravitacional.

Riemann percibe tan claramente la relación entre la función potencial y la propiedad de las funciones de variable compleja que decide estudiar un poco más en profundidad la de variable compleja. Su forma de pensar le lleva a definirlas como aquellas que cumplen lo que hoy se denominan ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Ver las cosas de esta forma fue una auténtica revolución pues hasta la fecha prácticamente el total de las funciones eran vistas por su expresión analítica. Estudiar una función definida por sus propiedades y no por su expresión era romper con un tradicionalismo que Riemann percibió como un obstáculo.

Cauchy muestra en *Mémoire sur la théorie des intégrales defines* las condiciones necesarias para que una función de variable compleja fuese compleja. El punto de vista de Cauchy consistía en ver la función como $f:\mathrm{R}^2 \longrightarrow \mathrm{R}^2$ con $u(x,y)$ y $v(x,y)$ parte real y parte imaginaria de la función. De esta forma la función *f* sería continua o diferenciable si *u* y *v* lo eran, lo cual exigía cumplir las ecuaciones $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

Sin embargo Riemann partió directamente de $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$. Así $w=f(z)$ es derivable en z_0 (contenido en un abierto) si $\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$

El cálculo de límite ha de ser independiente de la forma de acercarse *h* a cero. El valor de este límite se denota con $f'(z_0)$. Diremos por tanto que la función *f* es analítica en z_0

El estudio del límite dividiendo la expresión en su parte real y compleja nos lleva a la siguiente conclusión:

Si $h = k$ tiende a cero por los reales, escribimos $h = k$, con k real.

Si $h = k$ tiende a cero por el eje imaginario, escribimos $h = ik$, con k real.

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad f'(z_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Si el límite ha de ser igual nos acerquemos por donde nos acerquemos, entonces obtenemos las mismas condiciones que ya Cauchy encontró. Éstas son las ecuaciones llamadas hoy en día de "Cauchy-Riemann".

Riemann introdujo el punto de vista complejo en el análisis de variable compleja, naciendo de esta manera la "Teoría de Funciones". Con esta nueva definición Riemann se vio en la obligación de realizar un repaso exhaustivo a toda la teoría de funciones de variable compleja existente. La tesis de 1851 titulada "Principios fundamentales para una teoría general de las funciones de una variable compleja" es un estudio en profundidad de las funciones de variable compleja.

Uno de los principales problemas de las funciones de variable compleja es la multievaluación, veamos un sencillo ejemplo: la función logaritmo. Recordando la definición:

Sea $z\in\mathbb{C}$ y $z\neq 0$. Si *w* es un número complejo tal que $\exp(w)=z$, entonces se dice que *w* es un logaritmo de z. Y se escribe $w=\log z$. Es decir $\exp(w)=z\Leftrightarrow w=\log z$,

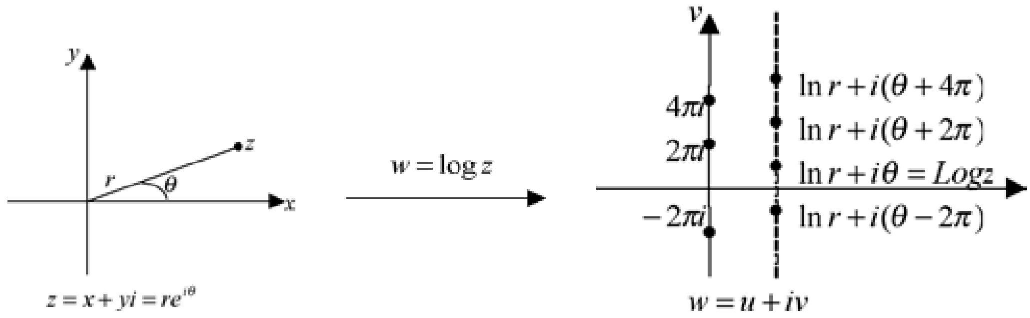
El problema aparece en la no inyectividad de la exponencial compleja, un rápido cálculo muestra por ejemplo $e^{2k\pi i} = 1$, esto supone un serio obstáculo para calcular su inversa, el logaritmo.

Sea $w=u+iv$. Y sea $|z|=r$ y $\arg z=\theta+2k\pi$ $(k\in\mathbb{C})$ siendo $\theta\in(-\pi,\pi]$ el argumento principal de $z(\arg(z))$.

Entonces $e^{w}=z\Leftrightarrow e^{u}(\cos v+i\,sen\,v)=r(\cos\theta+i\,sen\,\theta)$

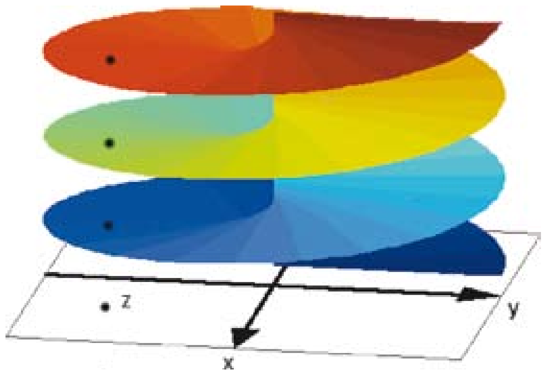
Por tanto $e^{u}=r$, es decir $u=\ln r$, y $v=\theta+2k\pi$, luego con $r=|z|$, $\theta=Arg(z)$, $k\in\mathbb{C}$

Por tanto existen infinitos logaritmos de un número complejo.



Se llama logaritmo principal de z o valor principal del logaritmo, y se denota a: $Log(z) = \ln r + \theta i$ con $r = |z|$, $(r \neq 0)$, $\theta = Arg(z) \in (-\pi, \pi]$

De esta forma la función logaritmo es ya uniforme. Está definida en todo el plano complejo, excluyendo al origen. Y su recorrido es la franja horizontal de anchura 2π.



Proyección de la Superficie de Riemann para log(z) con tres hojas

Riemann se encontró con este problema, el cuál suponía un obstáculo bastante serio a la hora de calcular integrales, pues éstas se realizan ahora a través de caminos en el plano complejo y no siempre están dentro del dominio principal. Pero Riemann era un matemático conceptual y decide cambiar este dominio para que las funciones complejas sean siempre inyectivas. Tomemos la función raíz cuadrada, $f(z) = \sqrt{z}$, $z \in C$

$z = r(\cos(\theta) + isen(\theta))$ su raíz es por tanto, $w = f(z) = \sqrt{r}\,(\cos(\theta/2) + isen(\theta/2))$

Tomemos ahora $z = r(\cos(\theta + 2\pi) + isen(\theta + 2\pi))$ y calculemos $f(z)$;

Obtenemos $f(z)$ otro distinto cuando aparentemente nuestro valor inicial es el mismo, solo hemos dado una vuelta al origen.

En el origen existe lo que se denomina un punto de ramificación de la función. Cualquier curva que de una vuelta alrededor de este punto generará problemas. Por tanto, hay que evitar dar la vuelta al origen, cosa que podemos conseguir cortando el plano como muestra la figura.

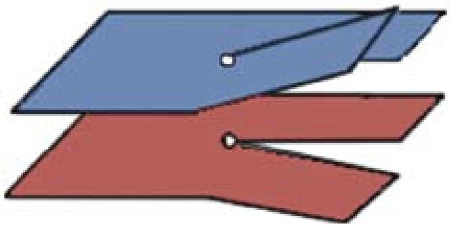
Sin embargo al dar otra vuelta más el valor $f(z)$ vuelve al principio.

Gráficamente podemos ver lo que sucede en la imagen siguiente:

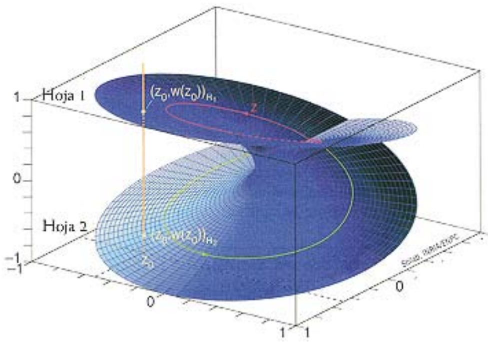
Dos copias del plano complejo. Para cualquier valor contenido en una de las dos hojas el valor de la función no cambia.

Visto así, z = $r(cos(\theta) + isen(\theta))$ y z = $r(cos(\theta+2\pi) + isen(\theta+2\pi)$ son puntos distintos situados cada uno en una hoja.

La idea genial de Riemann fue juntar estas dos copias en una sola, de forma que la función fuese continua en todos sus puntos, ahora el domino de la función no es el plano complejo sino una superficie "rara". Imaginar esta superficie no es tarea fácil pues la exigencia de continuidad en el semieje y en el infinito hace que no se pueda ver en el espacio tridimensional ordinario.



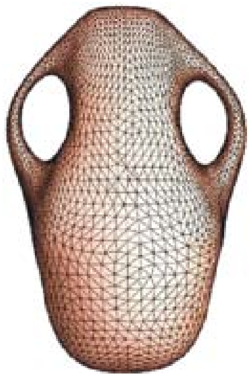
Pero Riemann necesitaba conocer estas superficies, muchos de los teoremas de variable compleja usan caminos definidos hasta entonces en el plano complejo pero esto cambia y se hace necesario un estudio topológico de las recién creadas superficies. Nace la Topología, el estudio de propiedades geométricas de objetos sin tener en cuenta ni formas ni distancias.



Proyección superficie de Riemann para la raíz

Riemann encuentra una forma de caracterizar a estas superficies mediante el género, de hecho, prueba que es un invariante topológico, es decir, dos superficies con el mismo género son topológicamente la misma superficie.

Estos nuevos conceptos llevaron a Riemann a realizar profundas reflexiones sobre el infinito y lo infinitesimal, la existencia de otros espacios y cómo caracterizarlos. Estas inquietudes hacen que se puede considerar a Riemann como uno de los padres de la Topología, aunque fue Listing quién acuñó por primera vez la palabra en 1836.



Superficie compacta de género 2, topológicamente equivalente a una esfera con dos asas

La dificultad para visualizar las ideas de Riemann hace que éste piense en un modelo un poco más práctico de imaginar el plano complejo con todos sus puntos, incluido el infinito. Define la compactificación del plano complejo por un punto lo que más tarde se denominaría esfera de Riemann. Con esta visión del plano complejo, el punto del infinito podemos tratarlo como otro punto más y lo que es más importante, podemos encontrar modelos topológicos para la superficies simplemente añadiendo agujeros a la esfera.

La clasificación que Riemann hizo nos lleva a pensar que solo trató superficies cerradas, con lo que el modelo de la esfera se adapta perfectamente.

No es exagerado, por tanto, el comentario que Gauss realizó sobre la tesis de Riemann.

Después de sus tesis Riemann se centra en seminario físico-matemático creado por Weber y Listing, su interés por la física aumenta, y esto unido a su interés por cuestiones relacionadas con la filosofía le llevan a pensar en la existencia de una teoría matemática capaz de explicar muchos de los fenómenos que de forma experimental ensaya con Weber.

Riemann nunca dejó de lado sus inquietudes filosóficas convirtiéndose en una costumbre leer textos sobre filosofía. J. F. Herbart (1776-1841) profesor de pedagogía en Göttingen se convierte en su filósofo preferido. A comienzos de 1853 Dedekind cuenta que estaba tan absorto en temas de filosofía natural que estaba convencido de poder publicar sus conclusiones. En un texto publicado alrededor de 1853 decía:

> "Mi ocupación principal concierne a una concepción nueva de las conocidas leyes naturales –expresión de las mismas mediante otros conceptos básicos–, con lo que se hace posible emplear los datos experimentales sobre la interacción entre calor, luz, magnetismo y electricidad, para investigar su interrelación. A ello me condujo fundamentalmente el estudio de las obras de Newton, de Euler y –por otro lado– de Herbart. En lo tocante al último, he podido adherirme casi en su totalidad a las investigaciones más antiguas de Herbart, cuyos resultados están expresados en sus tesis de promoción y habilitación (del 22 y 23 de octubre de 1802), pero he tenido que apartarme del camino posterior de su especulación en un punto esencial, lo que conlleva diferencias con especto a su filosofía natural y a aquellas proposiciones de la psicología relativas a su conexión con la filosofía natural."

A finales de 1853 tiene preparado "Teoría de los anillos coloreados de Nobili" , efecto electroquímico descubierto por el científico italiano Leopoldo Nobili (1787-1835) en 1825, que usando un electrodo plano mostró que se producen depósitos electrolíticos en forma de bandas concéntricas coloreadas; dejando patente que la corriente eléctrica se propaga a través de conductores no hilados.

Anillos coloreados de Nobili

Riemann, bajo las premisas de la filosofía natural, intenta buscar una explicación matemática al fenómeno. Por supuesto consigue ajustar tanto la teoría matemática que se hace innecesario pensar en otras explicaciones. Este es un ejemplo de cómo Riemann relaciona de manera magistral física con matemática, lo cual exige un gran conocimiento de ambas partes.

Entre tanto sigue con la sugerencia de Gauss de obtener la condición de Privadozent y en 1854 presenta dos trabajos muy importantes siendo la lección inaugural sobre geometría la que pasará a la historia en detrimento de la segunda tesis que presentó.

LECCIÓN INAUGURAL Y SEGUNDA TESIS

La creación de las Superficies de Riemann y su caracterización llevará a Riemann a revisar conceptos hasta la fecha impensables. Gauss ya había conseguido romper el tradicionalismo existente sobre geometría dejando de tratar objetos sólidos. Ahora las superficies son entidades propias y como tal tiene sus propiedades, algo que mostró perfectamente en su artículo de 1828 "Disquisiciones generales circa superficies curvas".

Riemann va más allá y considera objetos no solo tridimensionales sino n-dimensionales. En su lección inaugural presenta tres conceptos muy claros: definición de variedad, métrica de una variedad y curvatura de esa variedad.

La lección inaugural comienza definiendo en palabras sencillas el concepto de variedad n-dimensional, para ello ilustra a los asistentes con un ejemplo muy simple: El movimiento de un punto, variedad considerada de dimensión cero cuyo movimiento nos genera una recta, que a su vez nos generará un plano, éste un espacio y un espacio una variedad de dimensión cuatro. Riemann no dudó en plantear la existencia de espacios de dimensión mayor que tres, siendo nuestro realidad un caso particular, el de n = 3.

Un resultado colateral a esta definición fue la dimensión de una variedad: intuitivamente la dimensión será el número de parámetros necesarios para identificar un punto en la variedad, la definición exacta precisa de un estudio más exhaustivo pero la idea original de Riemann fue correcta.

La segunda idea clave en palabras de Riemann fue:

> "Una vez construido el concepto de variedad de n dimensiones y encontrada su característica esencial, a saber, que la determinación de posición en aquélla se puede reducir a n determinaciones de magnitud, sigue a continuación, como segundo de los problemas establecidos arriba, una investigación sobre las relaciones métricas de las que es susceptible una variedad tal, ... "

Hasta ahora una variedad era un concepto topológico sin forma ni medida, Riemann intenta poner orden, para lo cual se apoyó en los trabajos de su maestro Gauss. En 1828 Gauss muestra a la comunidad científica que no es necesario conocer la inmersión de una superficie en el espacio para conocer su geometría.

Según Gauss una superficie S viene definida por una parametrización de la forma:

$$X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad x(u,v), y(u,v), z(u,v)$$

Trasladando el elemento de línea del plano $dx^2 = du^2 + dv^2$ (el teorema de Pitágoras) a través de la parametrización obtenemos que el elemento de línea de la superficie X_u es la derivada de X respecto de la variable u.:

$$dx^2 = x_u^2 du^2 + x_u x_v dudv \ + x_v^2 dv^2$$

En su forma más general $dx^2 = \sum g_{ij} dx_i dx_j$ donde las funciones g_{ij} dependen de la posición. Esta pequeña fórmula se conoce como "Primera forma fundamental" de la superficie $S \subset R^3$ en $p \in S$ denotando

$$E = x_u^2(u,v), F = x_u x_v \text{ y } G = x_v^2(u,v)$$

Así hemos trasladado el producto escalar del plano euclídeo al plano tangente de S en p

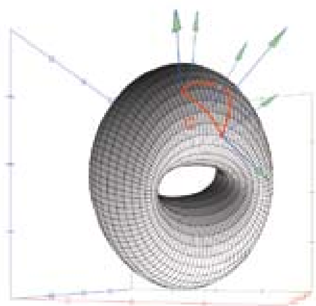
$$I_p : T_pM \times T_pM \to R; I_p(\xi,\mu) = (\xi,\mu)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \mu \end{pmatrix}$$

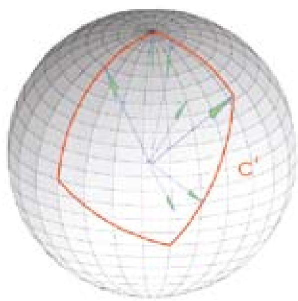
que nos permitirá calcular longitud, áreas y ángulos de curvas sobre la superficie.

La originalidad de Riemann fue pensar que una variedad podía tener varias métricas locales con una métrica global distinta. De hecho una definición general de variedad Riemanniana es ésta precisamente, variedades con métricas locales euclídeas que a nivel global poseen métricas no euclídeas. Una vez más sus ideas filosóficas se mezclan con las matemáticas, Riemann piensa que la explicación de los fenómenos había que buscarla en lo infinitesimal.

Un ejemplo muy sencillo es la propia tierra, a nivel local se comporta como un plano y a nivel global tenemos una métrica esférica.

Siguiendo las ideas de su maestro Gauss, Riemann trata de caracterizar las variedades. Para el caso bidimensional, es decir, para las superficies la curvatura nos basta para caracterizar la superficie, pero al generalizar, el concepto de curvatura tal y como Gauss lo plantea en 1828 no es suficiente.





Gauss asigna a cada punto de la superficie un valor de curvatura y define la curvatura total.

Gauss define la curvatura total de una porción de superficie encerrada dentro de una curva C de la siguiente manera:

"El vector normal a una superficie en un punto dado es el vector que pasa por el punto y que es perpendicular al plano tangente a la superficie en dicho punto. En cada punto de C existe un vector normal a la superficie. Si trazamos todos los vectores normales en los puntos de C tendremos un haz de vectores".

En una esfera de radio unidad trazamos los vectores paralelos a los normales a C que pasen por el centro de la esfera.

Este haz de vectores o las rectas que generan cortan a la superficie esférica determinando una curva C´. El área encerrada de la superficie esférica encerrada por esta curva C´ se denomina curvatura total de la porción de superficie limitada por C.

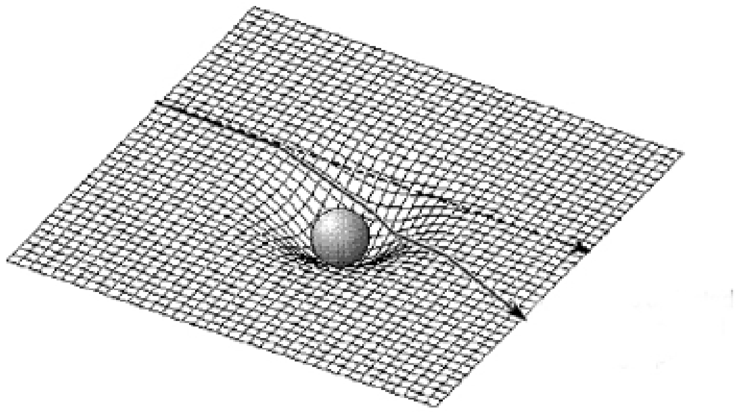
La curvatura de Gauss en un punto interior de C es el límite de la razón entre el área de C´ y el área de C cuando la superficie C tiende al punto.

Riemann demuestra que en una variedad n-dimensional no es bastante un solo número, sino que se requieren n(n-1)/2 parámetros distintos en cada punto y por supuesto dependientes de la métrica.

El objeto matemático capaz de mostrar tanta información se denominó Tensor de Curvatura que mide la desviación de la geometría riemanniana definida por la métrica anterior respecto de la geometría euclídea. De nuevo Riemann funda otra nueva disciplina: el cálculo tensorial.

La lección inaugural puso punto y final a la polémica de las geometrías no euclídeas pues Riemann mostraba claramente la existencia de métricas no euclídeas y por tanto de espacios no euclídeos. Desgraciadamente el texto de esta lección no se publicó hasta después de su muerte con lo cual Riemann no pudo llegar a ver las grandes repercusiones de su teoría.

Riemann ve el espacio como una variedad tridimensional, imposible de ver para nosotros, donde las diferentes fuerzas de la naturaleza: magnetismo, gravedad y electricidad inducen cambios en la métrica de la variedad.



De hecho, unos años más tarde Herman Minkowski (1864-1909) define una métrica muy particular $dx^2+dy^2+dz^2 - c^2dt^2$ (c es la velocidad de la luz) con la que afirma que es posible describir mejor las ecuaciones de Lorentz sobre electromagnetismo y que más tarde usará Albert Einstein para su teoría de la relatividad.

Como mencionamos, esta lección eclipsó por completo el otro trabajo de Riemann y que es de obligatorio estudio en los primeros cursos universitarios de análisis: La integral de Riemann.

Durante el tiempo que paso en Berlín estudio bajo la dirección de Dirichlet y adquirió interés por las series de Fourier. En 1854 emprendió la investigación del tema, que tenía como finalidad encontrar condiciones necesarias y suficientes que una función debe satisfacer para que la serie de Fourier para *f(x)* en un punto x del intervalo $[-\pi,\pi]$ convergiera a *f(x)*. Estas condiciones pasaban por entender las integrales que aparecen en las series de Fourier:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

Riemann presenta en esta tesis la definición actual de integral en el sentido de ser el límite de las sumas superiores e inferiores y claro, resuelve cierto problemas de integrabilidad de los términos de las Serie de Fourier, en concreto, que la convergencia de la Serie en un punto en $[-\pi,\pi]$ depende exclusivamente del comportamiento de *f(x)* en la vecindad de ese punto. También probó que una función dada puede ser integrable y aun así no tener una representación en serie de Fourier.

TEORÍA DE LAS FUNCIONES ABELIANAS

Después de obtener su condición de Privadozent Riemann tiene un dominio absoluto de su teoría y decide aplicar su concepción a otras disciplinas. Comienza con las ecuaciones diferenciales, unas muy particulares, las referidas a las series hipergeométricas, en la memoria *Contribución a la teoría de funciones representables por series de Gauss* Riemann escribe:

> "En la siguiente memoria, trato de explicar un nuevo método que es aplicable esencialmente a toda función que cumpla una ecuación diferencial con coeficientes algebraicos. Con su ayuda y los resultados encontrados anteriormente, los cálculos bastante dolorosos, se deducen directamente de la definición. Es lo que haré en esta parte de la memoria, principalmente con el fin de dar, tras las numerosas aplicaciones de esta función en la Física y la Astronomía, un resumen cómodo de todas las representaciones posibles".

Riemann generaliza, partiendo de una ecuación diferencial general

$a_0(z)w^{n'} + a_1(z)w^{n-1'} + \ldots + a_{n-1}(z)w' + a_n(z)w \;\; = 0$, introduce el punto vista complejo y muestra que las soluciones están caracterizadas por la posición y naturaleza de las singularidades de la ecuación, surgen conceptos como grupo de monodromía, homotopía, espacio de soluciones.

Pero sin duda la investigación que le encumbra a lo más alto y de hecho inclina la balanza a su favor en la sucesión de Dirichlet es el artículo "Teoría de las funciones Abelianas".

Conocedor de los trabajos de Jacobi y Abel, a Jacobi lo conoció personalmente en Berlín, Riemann decide investigar sobre este tema desde su punto de vista.

Las integrales elípticas surgen a raíz de la rectificación de ciertas curvas, en particular, la elipse de ahí el nombre.

Muchos matemáticos estudiaron la relación planteada por la integral que aparece en el cálculo de la longitud de un segmento de elipse.

La longitud de una curva dada por la expresión $y = f(x)$ es $\int \sqrt{1+f'(x)}dx$ obteniendo la integral $\int \sqrt{\frac{a^2-ex^2}{a^2-x^2}}dx$, con $e = 1 - \frac{b^2}{a^2}$. La cuál nos da la siguiente relación: $S(r) = \int_0^r \sqrt{\frac{a^2-ex^2}{a^2-x^2}}dx$.

Jacob Bernoulli, Euler, Legendre, Jacobi y Abel trabajaron intensamente en la compresión de esa relación, ya que la aparición de este tipo de integrales en problemas físicos es muy abundante, siendo estos dos últimos lo que llevaron la teoría de funciones elípticas a su máxima expresión estudiando la relación inversa, o el problema de inversión.

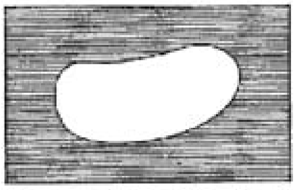
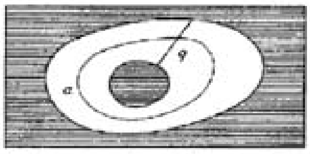
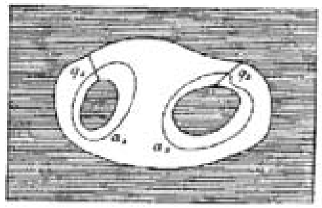
Riemann continuó con los trabajos de Jacobi y Abel pero desde un punto de vista complejo. Consideremos la integral $\int R(x,y)dx$, donde x e y están relacionados por f(x,y) = 0. Inicialmente x e y fueron consideradas variables reales. El teorema de Abel establece que una suma de integrales del tipo $\int R(x,y)dx$ puede ser expresada en términos de p integrales de ese tipo más términos algebraicos y logarítmicos. Más aún, el número p solo depende de la ecuación $f(x,y)=0$

Abel y Jacobi lo intentaron también con la variable compleja pero el problema de la multievaluación fue un obstáculo que no lograron superar. Sin embargo Riemann lo tenía resuelto, tomó los trabajos de Abel y se realizó las mismas preguntas.

Ahora el domino de una función compleja es una superficie de Riemann y tuvo que clarificar con mucho detalle el proceso de caracterizar una superficie mediante una función $f(u,z)=0$

. De nuevo, introduce su visión topológica y geométrica en un problema aparentemente analítico. Sin entrar en detalles Riemann encontró multitud de obstáculos siendo la multievaluación de la integral $\int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$ que cambia en múltiplos de π y $-\pi$ según que el camino que elijamos para integrar rodee ó no lo polos *i* y *-i*, consecuencia del teorema de los Residuos de Cauchy.

Riemann piensa como evitar estos problemas y propone dar cortes en una superficie hasta convertirla en simplemente conexa. Estos cortes están relacionados con el género, y los cortes con los puntos singulares de la función. Riemann había encontrado la forma de relacionar el género de una superficie con un concepto totalmente algebraico.

Fig. 4  Fig. 5 	Fig. 6 
Superficie Simplemente conexa	Superficie Doblemente conexa

Ilustraciones de Riemann sobre superficies simplemente conexas. Teoría de las Funciones Abelianas

Al igual que Legendre también realizó una clasificación de las integrales abelianas intentando más tarde el problema de inversión. Se había establecido un conexión entre la Topología, la variable compleja y las funciones abelianas llevando a su máxima expresión su idea de que todo esta en realidad relacionado.

ÚLTIMOS AÑOS

Después de este artículo Riemann está extenuado por el esfuerzo y su lucidez comienza a apagarse, pero el reencuentro con su familia y el reconocimiento por parte de la universidad le devuelven la ilusión.

De esta forma en 1859 publica su artículo “Sobre el número de números primos menores que una cantidad dada”, ver el artículo de Capi Corrales.

En los últimos años de su vida Riemann vuelve a la física, prepara una memoria “Sobre una cuestión sobre la conducción del calor” en la que introduce los conceptos presentados en su lección inaugural de 1854. En este trabajo introduce explícitamente el tensor de curvatura desarrollando toda la teoría de formas cuadráticas necesarias para entender su creación.

Las continuas recaídas de su enfermedad y los viajes a Italia en un intento de luchar contra la tuberculosis le impidieron seguir con sus investigaciones. Desgraciadamente Riemann muere el 20 de Julio de 1866.

Riemann fue un matemático genial en el sentido estricto de la palabra. Me gustaría finalizar con una descripción de su gran amigo Dedekind:

> “Él, pensaba, más allá que los demás, a los que a veces les costaba seguirle y se veían en la obligación de interrumpirle para que se explicase más despacio”.

BIBLIOGRAFÍA

Antonio F. Costa, Manuel Gamboa y Ana M. Porto, 2005: *Notas de Geometría diferencial de curvas y superficies*. Madrid: Sanz y Torres, D. L.

Capi Corrales, 2007: "Números en Núm3ros". Revista *SIGMA,* nª 30.

Carl B. Boyer, 2003: *Historia de la matemática*. Madrid : Alianza, D. L.

Detlef Laugwitz, 1999: *Bernhard Riemann, 1826-1866: Turning Points in the Conception of Mathematics*. Birkhäuser.

Enrique Linés Escardó, 1981: *Análisis matemático IV*. Madrid: UNED, D.L.

H. Weber y R. Dedekind, 1876: *Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische werke und wissenschaftlicher nachlass / Bernhard Riemann; herausgegeben unter mitwirkung von Richard Dedekind, von H. Weber*. Leipzig: Teubner.

José Ferreiros, 2000: *Riemanniana selecta / Bernhard Riemann; edición y estudio a cargo de José Ferreirós*. Madrid : Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Jose Luis Muñoz Casado, 2006: *Riemann. Una visión nueva de la geometría*. Madrid. Nivola.

José Manuel Sanchez Ron, 2004: *Einstein, la relatividad y las matemáticas*. La gaceta de la rsme, Vol. 7.1.

Manfredo P. Do Carmo, 1990: *Geometría diferencial de Curvas y Superficies*. Madrid: Alianza Editorial.

Michael Monastyrsky, 1998: *Riemann, Topology, and Physics*. Boston: Birkhäuser.

Narasimhan, Raghavan, 1990: *Bernhard Riemann. Gesammelte mathematische werke, wissenschaflicher nachlass und nachtrage = Collected papers / Neu herausgegeben von Raghavan Narasimhan*. Berlín: Springer.

NOTAS

(1) En 1837 un grupo de siete profesores fueron expulsados de la Universidad por negarse a aceptar la retirada de la constitución liberal de 1833.