BATXILERGOKO MATEMATIKA MAPLEREKIN

FERNANDO GARATEA

1. SARRERA

Artikulu honetan Batxilergoko Matematikaren curriculumari egokitutako zenbait ariketa ageri dira **Maple** programa informatikoarekin ebatzita. Ariketok **Batxilergoko Matematika Maplerekin** izeneko nire lanetik atera.

1.1 Zer da Maple?

Maple kalkulu sinbolikoa, grafikoa zein zenbakizkoa lantzeko balio duen programa informatikoa da. Eta haren ezaugarrietako bi, hauexek:

- Eskuz orduetan burutuko ez genituzkeen kalkuluak segundoetan burutzen dituela.
- Matematikako curriculum osoa lantzeko balio duela.

1.2 Erabil daiteke ikasgelan?

Ikasgelak baliabide informatikorik badu, bai.

1.3 Zer lortzen da programa horrekin?

- Batxilergoko Matematikan eragiketek duten gainzama arintzea.
- Egiten den guztia grafikoki interpretatu ahal izatea, ikasleari kontzeptuak askoz hobeto ulertzeko aukera eskainiz.
- Ikasle askok eragiketekin dituzten zailtasunak saihestea, ikasleari 'urrunago' joateko aukera ahalbidetuz.
- Problema errealetatik eta arlo profesionalean lan egiteko modutik hurbilago dagoen matematika aurkeztu ahal izatea.
- Ikasleari modu autonomoagoan lan egiteko aukera eskaintzea, bakoitzari bere lan-erritmoa errespetatuz.
- ...

1.4 Surfarekin alderatuz

Matematika-irakasleak igeri egiten irakatsi behar die eragiketen itsason murgilduta dabiltzan ikasleei, hondartzara iristeko xedez batzuk olatutzan gozatzen, beste batzuk hondoratzeko beldurrez sufritzen, itota ere bai bakarren bat...

Surfeko taula bana emanez gero igerilariei, egoera asko hobetuko litzateke. Gozatzen duenak gehiago gozatzeko aukera izango bailuke, olatuei gaina hartzen ikasiz, eta sufritzen duenak hondoratzeari beldurra kenduko lioke, taulari ondo ebatuta ez baitago hondoratzerik.

Baina ez lukete igeri egiten ikasiko. Agian ez, baina ziur hondartzara heltzen direla.

Eragiketen gainzama arinduz, matematika erakargarriago egitea da matematika Maplerekin irakastearen helburua. Gozatzen duenak gehiago goza dezan eta sufritzen duenak gutxiago sufri dezan.

Irakasleari dagokio noiz eman surfeko taula eta noiz ez. Gaiak sakontzeko, birpasatzeko, sarrerak egiteko, emaitzak grafikoki interpretatzeko, ... erabil daiteke Maple ikasgelan eta gainontzeko egoeretan ohiko metodologiari jarraitu.

Matematika Laborategia hautazko irakasgairako ere aproposa da Maple.

2. OINARRIZKO ERAGIKETAK MAPLE-N

2.1 Sintaxia

Edozein eragiketa burutzeko, ondoko urratsak ibili behar dira: eragiketa > promt-aren ostean idatzi, eragiketaren amaiera puntu eta koma batez adierazi eta, egikaritzeko, ENTER tekla sakatu. Hara hemen adibide batzuk:

> **4 + 5;**

9

> **12 - 7;**

5

> **2 * 5;**

10

> **8/2;**

4

> **2 ^ 4;**

16

> **2 * (3 + 4);**

14

> **(*x* + *y* + *z*) ^ 2;**

$(x + y + z)^2$;

2.2 Lehentasunak

Ohikoak dira: lehenengo parentesiak, gero berreketak, ondoren biderketak nahiz zatiketak eta azkenez batuketak zein kenketak. Zer esan nahi du horrek: bada, eragiketa multzo baten aurrean parentesirik egonez gero, lehenik parentesiak egikaritzen direla, ondoren berreketak, gero biderketa nahiz zatiketak eta azkenez batuketak zein kenketak. Lehentasunean maila berekoak diren eragiketak suertatuz gero, lehenen ezkerreren dagoena egikaritzen da. Ikusi ondoko adibideetan:

> **2 * 3 + 4;**

10

> **3 ^ 2 * 4 + 5;**

41

> **(2 + 4) ^ 2/3 - 5;**

7

> **16 / 4 / 2;**

2

> **12 - 4 - 7;**

1

2.3 Polinomio baten faktorizazioa

Polinomio bat edo adierazpen bat faktorizatzeko, *factor* komandoa erabiliko dugu, honako sintaxiarekin:

> **factor (*x* ^ 4 - 1);**

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

> **factor (*x* ^ 8 - *y* ^ 8 * *z* ^ 16);**

$$(x - y z^2) (x + y z^2) (x^2 + y^2 z^4) (x^4 + y^4 z^8)$$

2.4 Adierazpen edo espresio matematikoak idazten

Letrak eta zenbakiak lege edo arau berdinen menpe idazten dira:

> **3 * x ^ 5 + 7 * x ^ 2 - 5 * x ^ 2 + 3 * x - 4;**

$$3 x^5 + 2 x^2 + 3 x - 4$$

> **3 * x ^ 2 * y ^ 3 - 4 * x * y ^ 7;**

$$3 x^2 y^3 - 4 x y^7$$

2.5 Adierazpen matematikoen garapena

Batuketak eta kenketak era arruntean egikaritzen badira ere:

> **(3 * x ^ 3 + 6 * x ^ 2 - 15 * x + 12) + (3 * x ^ 2 + 4 * x - 5);**

$$3 x^3 + 9 x^2 - 11 x + 7$$

biderketen kasuan eragiketa egikaritu gabe geratzen da:

> **(3 * x ^ 2 - 5 * x + 4) * (2 * x ^ 2 - 13 * x + 12);**

$$(3 x^2 - 5 x + 4) (2 x^2 - 13 x + 12)$$

Orduan, eragiketa hori gauzatzeko edota garatzeko, *expand* komandoa erabiliko dugu:

> **expand ((3 * x ^ 2 - 5 * x + 4) * (2 * x ^ 2 - 13 * x + 12));**

$$6 x^4 - 49 x^3 + 109 x^2 - 112 x + 48$$

Berreketetan, beste horrenbeste:

> **(x + y) ^ 10;**

$$(x + y)^{10}$$

> **expand ((x + y) ^ 10);**

$$x^{10} + 10 x^9 y + 45 x^8 y^2 + 120 x^7 y^3 + 210 x^6 y^4 + 252 x^5 y^5 + 210 x^4 y^6 + 120 x^3 y^7 + 45 x^2 y^8 + 10 x y^9 + y^{10}$$

2.6 Adierazpen matematikoen sinplifikazioa

Zenbakien arteko zatiketak automatikoki sinplifikatzen dira:

> **1230 / 3420;**

$$\frac{41}{114}$$

Baina polinomioen artekoak ez:

> **(x ^ 3 - 3 * x + 2) / (x ^ 2 - 1);**

$$\frac{x^3 - 3\,x + 2}{x^2 - 1}$$

> **simplify ((x ^ 3 - 3 * x + 2) / (x ^ 2 - 1));**

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$$

Horiek sinplifikatzeko, *simplify* komandoa behar da.

2.7 Aldagaiei balioak esleitzen

Aldagai bati balio bat esleitzeko, aldagaiaren eta balioaren artean *bi puntu* eta *berdin* ikurrak tartekatuko ditugu:

> ***a*: = 10;**

$$a := 10$$

> ***a*;**

$$10$$

> ***A*;**

$$A$$

Letra larriak eta xeheak bereizi egiten ditu Maplek, ikusten dugunez.

2.8 Segidak

Seq komandoaren laguntzaz definituko ditugu, komandoaren sintaxia ondoko adibideetan argituko dugularik.

Ondoko segida, adibidez, lehenengo *10* zenbaki bikoitiena da:

> **seq (2 * i,i = 1..10);**

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$$

Hurrengoa, lehenengo 10 zenbaki arrunten karratuena:

> **seq (n ^ 2,n = 1..10);**

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$$

Idatz ditzagun, azkenez, lehenengo *20* zenbaki lehenak, horretarako i. zenbaki lehena ematen duen *ithprime* komandoa erabiliz:

> **seq (ithprime(i),i = 1..20);**

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71

3. FUNTZIO ESPONENTZIALA ETA LOGARITMIKOA

3.1 e zenbakia

e zenbakia logaritmo nepertarren oinarria da eta, *exp (1)* eginda kalkulatuko dugu, hor *exp* funtzio esponentziala da.

> **exp (1);**

e

Ebaluatzeko, berriz, *evalf* komandoa erabiliko dugu:

> **evalf (%);**

2.718281828

e zenbakia ehun zifra hamartarrez kalkulatu nahi izanez gero, ondoko agindua emango dugu:

> **evalf (exp (1),100);**

2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724077\
6630353547594571382178525166427

e zenbakiaren berreketak ere *exp* funtzioarekin kalkulatuko ditugu eta *evalf* komandoarekin ebaluatuko:

> **exp (2),exp (-1),exp (2/3),exp (-3/4);**

$$e^2, e^{(-1)}, e^{(2/3)}, e^{(-3/4)}$$

> **evalf (%);**

7.389056099, .3678794412, 1.947734041, .4723665527

3.2 Logaritmoak

Logaritmorik erabilienak nepertarrak dira, oinarritzat *e* zenbakia dutenak, eta *ln* edo *log* komandoekin kalkulatuko ditugu. Ebaluatzeko, *evalf* komandoa erabiliko dugu:

> **ln (2);**

ln (2)

> **log (2);**

ln (2)

> **evalf (%);**

.6931471806

Gainontzeko logaritmoak *log [a] (x)* joskera dute, eta hor kortxete arteko *a*-k logaritmoaren oinarria adierazten du:

> **log [2] (16);**

$$\frac{\ln(16)}{\ln(2)}$$

• **evalf (%);**

3.999999999

4. TRIGONOMETRIA

4.1 Pi zenbakia

π zenbakia Pi (P larria) idatziz sartzen da ordenagailuan:

> **Pi;**

$$\pi$$

> **evalf (Pi,100);**

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816\
406286208998628034825342117068

4.2 Gradu hirurogeitarrak eta radianak

Graduetatik radianetara edo radianetatik graduetara igarotzeko, *convert* komandoa erabiliko dugu ondoko sintaxiarekin:

> **convert (Pi/3,degrees);**

60 *degrees*

> **convert (135 * degrees, radians);**

$$\frac{3}{4}\pi$$

4.3 Kalkulu trigonometrikoak funtzio zirkularrekin

Funtzio trigonometriko zirkularrak (sinu, kosinu, tangente, kotangente, sekante eta kosekante) *sin, cos, tan, cot, sec, csc* laburdurekin adierazten dira *Maplen,* eta radianen gain dute eragina:

> **sin (Pi/2);**

1

> **sin (90);**

sin (90)

> **evalf (%);**

.8939966636

4.4 ARIKETA

Ebatzi sin (2x) - 2 $\cos^2$ (x) = 0 ekuazio trigonometrikoa.

4.4.1 Ebazpena

Idatz dezagun ekuazioa eta ebatz dezagun *solve* komandoarekin:

> **sin (2 * x) - 2 * cos (x)^ 2 = 0;**

$$\sin(2x) - 2\cos(x)^2 = 0$$

> **solve (%);**

$$-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi$$

Maplek soluzio partikularrak kalkulatzen ditu; orokortzea norberaren esku dago.

5. ZENBAKI KONPLEXUAK

5.1 ARIKETA

Karratu baten erpinak $-8-8\sqrt{3}I$ zenbaki konplexuaren lau erroak dira. Kalkulatu lau errook, eta adierazi grafikoki.

5.1.1 Ebazpena

Karratuaren erpinak kalkulatuko ditugu. Horretarako, erpinetako bat kalkulatuko dugu berreketaren bidez:

> **z : = -8 -8 * sqrt (3) * I;**

$$z := -8 - 8I\sqrt{3}$$

> **z ^ (1/4);**

$$(-8 - 8I\sqrt{3})^{(1/4)}$$

> **evalc (%);**

$$\frac{1}{2}16^{(1/4)}\sqrt{3} - \frac{1}{2}I\,16^{(1/4)}$$

> **simplify (%);**

$$\sqrt{3} - I$$

Egiaztatzeko:

> **% ^ 4;**

$$(\sqrt{3} - I)^4$$

> **evalc (%);**

$$-8 - 8\,I\,\sqrt{3}$$

Eta erpin horri *z1* deituko diogu:

> **z1: = sqrt (3) - I;**

$$z1 := \sqrt{3} - I$$

Erpinetik erpinera *modulutzat 1* eta *argumentutzat* zirkunferentzia laurdena $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ duen *w* zenbaki konplexuaz biderkatuta goazenez, *w* idatzi eta beharrezko biderketak egingo ditugu:

> **w : = polar (1,Pi/2);**

$$w := \mathrm{polar}\left(1, \frac{1}{2}\pi\right)$$

> **z2 : = z 1 * w;**

$$z2 := (\sqrt{3} - I)\,\mathrm{polar}\left(1, \frac{1}{2}\pi\right)$$

> **evalc (%);**

$$1 + I\,\sqrt{3}$$

> **z3 : = z2 * w;**

$$z3 := (\sqrt{3} - I)\,\mathrm{polar}\left(1, \frac{1}{2}\pi\right)^2$$

> **evalc (%);**

$$-\sqrt{3} + I$$

> **z4 : = z3 * w;**

$$z4 := (\sqrt{3} - I)\,\mathrm{polar}\left(1, \frac{1}{2}\pi\right)^3$$

> **evalc (%);**

$$-1 - I\,\sqrt{3}$$

Hor dauzkagu, beraz, binaka elkarren aurkakoak diren karratuaren lau erpinak:

> **evalc (z1), evalc (z2), evalc (z3), evalc (z4);**

$$\sqrt{3} - I,\ 1 + I\,\sqrt{3},\ -\sqrt{3} + I,\ -1 - I\,\sqrt{3}$$

Hona hemen horien adierazpen grafikoa:

> **with (plots):**

> **with (plottools):**

> karratu: = polygon ([[1,sqrt(3)], [-sqrt(3),1], [-1,-sqrt(3)], [sqrt(3), -1]]):

> **abs(z1), abs(z2), abs(z3), abs(z4);**

2, 2, 2, 2

Guztien modulua *2* denez, *2* unitateko erradiodun zirkunferentzia eraikiko dugu:

> **zirkunferentzia: = circle ([0,0], 2):**

Eta zenbaki konplexuak geziak balira bezala adieraziko ditugu, horretarako *arrow* komandoa erabiliz:

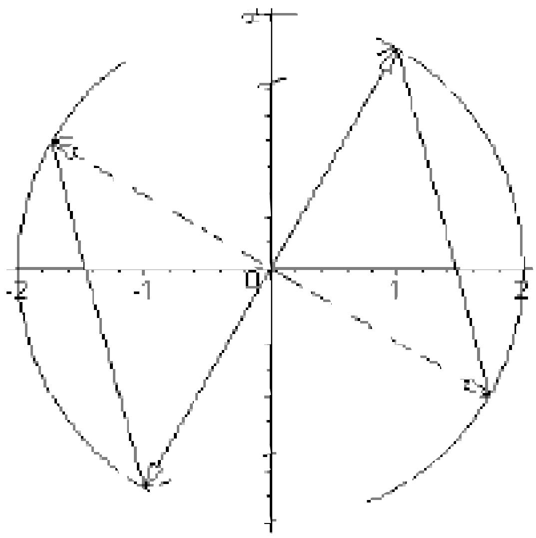
> **gez1: = arrow ([0,0], [sqrt(3), -1], 0,0.1,0.1):**

> **gez2: = arrow ([0,0], [1, sqrt(3)], 0,0.1,0.1):**

> **gez3: = arrow ([0,0], [-sqrt(3), 1], 0,0.1,0.1):**

> **gez4: = arrow ([0,0], [-1, -sqrt(3)], 0,0.1,0.1):**

> **display ([karratu, zirkunferentzia, gez1, gez2 ,gez3, gez4]);**



Horra hor, lauerroak grafikoki adierazita, zirkunferentzia lau zati berdinetan zatitzen eta karratu bat eraikitzen.

6. ADIERAZPEN GRAFIKOAK

6.1 Ariketa

Irudikatu grafiko berean $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ eta $y = \cos(\pi x)$ funtzioak, *OX* eta *OY* ardatzak eskala berarekin zatituz.

6.1.1 Ebazpena

Has gaitezen funtzioak definitzen:

> **f: = x - > sin (Pi * x/2);**

$$f := x \rightarrow \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$$

> **g: = x - > cos (Pi * x);**

$$g := x \rightarrow \cos(\pi x)$$

Abzisen eta ordenatuen ardatza eskala berarekin zatitzeko, *scaling* daukagu, kolorea definitzeko *color,* eta marraren lodiera *thickness*-ekin definituko dugu:

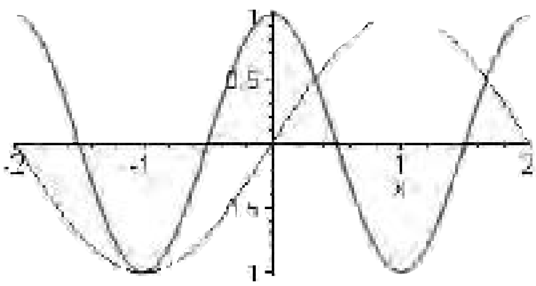
> **sinu: = plot (f(x), x = -2..2, scaling = CONSTRAINED, color = BLUE):**

> **kosinu: = plot (g(x), x= -2..2, scaling = CONSTRAINED, color = RED, thickness = 2):**

Bi funtzioak grafikoa berean irudikatzeko *plots* paketeko *display* komandoaz baliatuko gara:

> **with (plots):**

> **display (sinu, kosinu);**



nahi genuenez.

7. EKUAZIO ETA INEKUAZIOEN EBAZPENA

7.1 ARIKETA

Ebatz ezazu $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ ekuazioa eta interpretatu emaitza geometrikoki.

7.1.1 Ebazpena

Idatz dezagun ebatzi behar dugun ekuazioa:

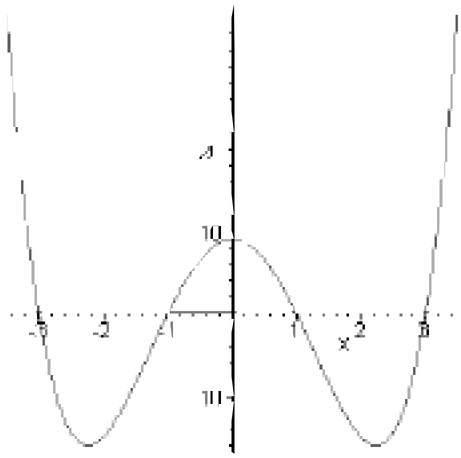
> **ek1: = x ^ 4 - 10 * x ^ 2 + 9 = 0;**

$$ek1 := x^4 - 10\,x^2 + 9 = 0$$

> **solve (ek1);**

-1, 1, 3, -3

> **plot (x ^ 4 - 10 * x ^ 2 + 9, x = -3.5..3.5);**



Zer dira *ek1* ekuazioaren soluzioak geometrikoki? $y = x^4 - 10\ x^2 + 9$ ekuaziodun kurbaren eta *OX* ardatzaren arteko ebakiguneak.

7.2 Ariketa

Ebatz itzazu ondoko inekuazioak analitikoki zein grafikoki:

a) $|x - 3| < 5$

b) $|x + 7| < 3$

7.2.1 Ebazpena

Idatz ditzagun ebatzi behar ditugun inekuazioak:

> **inek1: = abs (x - 3) <5;**

$$inek1 := |x - 3| < 5$$

> **inek2: = abs (x + 7) >3;**

$$inek2 := 3 < |x + 7|$$

eta ebatz ditzagun lehenengo analitikoki eta gero grafikoki:

> **solve (inek1);**

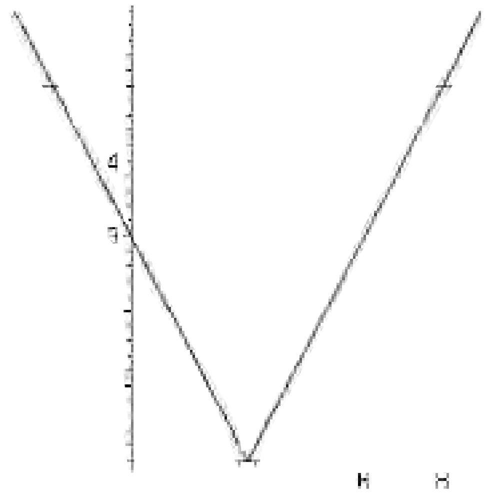
RealRange (Open (-2), Open (8))

> **solve (inek2);**

RealRange (Open (-4), ∞), RealRange (-∞, Open (-10))

Grafikoki ebazteko, irudika ditzagun grafiko berean lehenengo inekuazioaren atal biak:

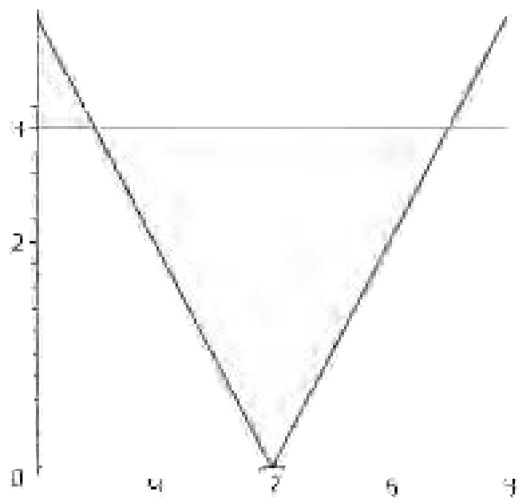
> **plot ({abs(x - 3),5}, x = -3..9);**



Orduan, balio absolutua adierazten duen marra *zein tartetan agertzen da* $y = 5$ adierazten duenearen azpitik? (-2,8) tartean eta horixe da inekuazioaren emaitza.

Irudika ditzagun bigarren inekuazioaren atalak:

> **plot ({abs (x + 7), 3}, x = -11.. -3);**



Balio absolutuaren marra zein tartetan gertatzen da $y = 3$ zuzenaren gainetik? (- ∞, -10) eta (-4, ∞) tarteetan. Horixe da inekuazioaren emaitza.

8. LIMITEAK

8.1 ARIKETA

Kalkulatu ondoko limiteak, eta islatu emaitza grafiko batean:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{1-\cos(x)} \quad , \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+x)}{1-\cos(x)} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1-\cos(x)}$$

8.1.1 Ebazpena

Kalkula ditzagun limiteak *limit* komandoarekin:

> **Limit ((ln (1 + x)) / (1 - cos(x)), x = 0, right) = limit ((ln (1 + x)) / (1 - cos(x)), x = 0, right);**

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)}{1-\cos(x)} = \infty$$

> **Limit ((ln (1 + x)) / (1 - cos(x)), x = 0, left) = limit ((ln (1 + x)) / (1 - cos(x)), x = 0, left);**

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\ln(1+x)}{1-\cos(x)} = -\infty$$

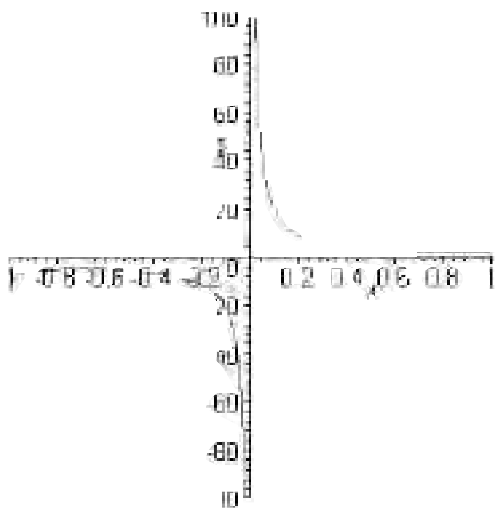
> **Limit ((ln (1 + x)) / (1 - cos(x)), x = 0) = limit ((ln (1 + x)) / (1 - cos(x)), x = 0);**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1-\cos(x)} = \mathit{undefined}$$

Alboko limiteak berdinak ez direnez gero, funtzioak ez du limiterik $x = 0$ abzisadun puntuan.

Grafikoki ikusteko:

> **plot ((ln (1 + x)) / (1 - cos(x)), x = -1..1, y = -100..100);**



9. DERIBATUAK

9.1 ARIKETA

Aztertu *f(x)* = |*x* + 2| + |*x*| + |*x* - 2| funtzioaren jarraitasuna eta deribagarritasuna, grafikoki eta analitikoki.

9.1.1 Ebazpena

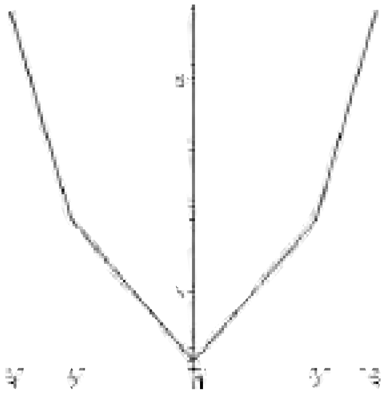
Defini dezagun funtzioa:

> **f: = x - > abs (x + 2) + abs (x) + abs (x - 2);**

$$f := x \rightarrow |x+2| + |x| + |x-2|$$

Eta azter ditzagun jarraitasuna eta deribagarritasuna, lehenengo grafikoki eta gero analitikoki:

> **plot (f (x), x = -3..3);**



Grafikoan ikusten dugunez, funtzioa jarraitua da baina ez deribagarria, *x = -2*, *x = 0* eta *x = 2* abzisadun puntuetan erpinak agertzen dituelako. Baina grafikoetan ikusten dena beti fidagarria ez denez, egin dezagun azterketa analitikoa. Horretarako, funtzioa zatika idatziko dugu:

> **convert (f (x), piecewise) ;**

$$\begin{cases} -3\,x & x \leq -2 \\ 4 - x & x \leq 0 \\ 4 + x & x \leq 2 \\ 3\,x & 2 < x \end{cases}$$

Funtzioak etenik izatekotan, x = -2, x = 0 eta *x = 2* puntuetan izango du, horietan baitago adarren bereizketa. Kalkula ditzagun funtzioaren alboko limiteak eta funtzioak puntu horietan hartzen duen balioa:

> **Limit (f (x), x = -2, left) = limit (f (x), x = -2, left);**

$$\lim_{x \rightarrow (-2)-} |x+2| + |x| + |x-2| = 6$$

> **Limit (f (x), x = -2, right) = limit (f (x), x = -2, right);**

$$\lim_{x \to (-2)+} |x+2| + |x| + |x-2| = 6$$

> **f(-2);**

$$6$$

Beraz, funtzioa jarraitua da *x = -2* puntuan, alboko limiteak eta funtzioak *x = -2*-an hartzen *duen balioa berdinak baitira. Azter dezagun, ondoren, jarraitasuna x = 0*-an:

> **Limit (f (x), x = 0, left) = limit (f (x), x = 0, left);**

$$\lim_{x \to 0-} |x+2| + |x| + |x-2| = 4$$

> **Limit (f (x), x = 0, right) = limit (f (x), x = 0, right);**

$$\lim_{x \to 0+} |x+2| + |x| + |x-2| = 4$$

> **f (0);**

$$4$$

Jarraitua da *x=0*-an ere, alboko limiteak eta funtzioak puntuan hartzen duen balioa berdinak baitira. Eta *x=2*-an?

> **Limit (f (x), x = 2, left) = limit (f (x), x = 2, left);**

$$\lim_{x \to 2-} |x+2| + |x| + |x-2| = 6$$

> **Limit (f (x), x = 2, right) = limit (f (x), x = 2, right);**

$$\lim_{x \to 2+} |x+2| + |x| + |x-2| = 6$$

> **f (2);**

$$6$$

Baita ere, alboko limiteak eta funtzioak *x = 2*-an hartzen duen balioa berdinak baitira. Beraz, funtzioak ez du etenik. Deribagarria ote da? Deribagarritasunak ere huts egitekotan, *x = -2*, *x = 0* eta *x = 2* puntuetan egingo du, gainontzekoetan ez, zuzenak puntu guztietan baitira deribagarri. Azter dezagun, bada, deribagarritasuna *x = -2* puntuan, alboko deribatuak erabiliz:

> **Limit ((f (-2 + h) - f (-2)) / h, h = 0, left) = limit ((f (-2 + h) - f (-2)) / h, h = 0, left);**

$$\lim_{h \to 0-} \frac{|h| + |-2+h| + |-4+h| - 6}{h} = -3$$

Beraz, ezker-deribatua *-3* da, *x = -2* puntuan.

> **Limit ((f (-2 + h) - f (-2)) / h, h = 0, right) = limit ((f (-2 + h) - f (-2)) / h, h = 0, right);**

$$\lim_{h \to 0+} \frac{|h| + |-2+h| + |-4+h| - 6}{h} = -1$$

Eta eskuin-deribatua *-1, x = -2* puntuan. Orduan, funtzioa ez da deribagarria x=-2 puntuan. Egin dezagun gauza bera *x = 0* eta *x = 2* puntuekin:

> **Limit ((f (0 + h) - f (0)) / h, h = 0, left) = limit ((f (0 + h) - f (0)) / h, h = 0, left);**

$$\lim_{h \to 0-} \frac{|h+2|+|h|+|-2+h|-4}{h} = -1$$

> **Limit ((f (0 + h) - f (0)) / h, h = 0, right) = limit ((f (0 + h) - f (0)) / h, h = 0, right);**

$$\lim_{h \to 0+} \frac{|h+2|+|h|+|-2+h|-4}{h} = 1$$

Honenbestez, funtzioa ez da deribagarria $x = 0$-an, alboko deribatuak puntu horretan ez direlako berdinak. Eta $x = 2$-an?

> **Limit ((f (2 + h) - f (2)) / h, h = 0, left) = limit ((f (2 + h) - f (2)) / h, h = 0, left);**

$$\lim_{h \to 0-} \frac{|h+4|+|h+2|+|h|-6}{h} = 1$$

> **Limit ((f (2 + h) - f (2)) / h, h = 0, right) = limit ((f (2 + h) - f (2)) / h, h = 0, right);**

$$\lim_{h \to 0+} \frac{|h+4|+|h+2|+|h|-6}{h} = 3$$

Ezta ere, alboko deribatuak desberdinak direlako puntu horretan.

Laburtuz, funtzioa jarraitua da R osoan, baina ez deribagarria.

9.2 Ariketa

Aztertu analitikoki $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ funtzioaren gorakortasuna eta beherakortasuna, eta kalkulatu f(x)-ren maximo eta minimo erlatiboak. Ondoren, egiaztatu kalkulu guztiak grafikoki.

9.2.1 Ebazpena

Defini dezagun ariketan proposatzen diguten funtzioa:

> **f: = x - > x ^ 3 / (x^2 - 4);**

$$f := x \to \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

Gorakorra non den ikusteko, lehenengo deribatua positiboa non den aztertu beharko dugu:

> **gorakorra: = solve (diff (f (x), x) > 0);**

$$gorakorra := \mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(-2\sqrt{3})), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(2\sqrt{3}), \infty)$$

Eta beherakorra lehenengo deribatua negatiboa den puntuetan izango da:

> **beherakorra: = solve (diff (f (x), x) < 0);**

beherakorra := RealRange(Open($-2\sqrt{3}$), Open(-2)), RealRange(Open(-2), Open(0)), RealRange(Open(0), Open(2)), RealRange(Open(2), Open($2\sqrt{3}$))

Ukitzaile horizontaleko puntuak lehenengo deribatua zero eginda aterako ditugu:

> **UHP: = solve (diff (f (x), x));**

$$UHP := 0, 0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}$$

Maximoak eta minimoak atzemateko, lehenengo deribatuaren irizpidea erabiliko dugu eta, ikusten dugunez, $x = -2\sqrt{3}$ ukitzaile horizontaleko puntuan funtzioa gorakorra izatetik beherakorra izatera igarotzen da; beraz, puntu horretan maximoa dauka. $x = 0$ ukitzaile horizontaleko puntuan funtzioa beherakorra izatetik beherakorra izatera igarotzen da, hortaz, puntu horretan ez dago ez maximorik ez minimorik, inflexio puntua baizik. Eta, azkenez, $x = 2\sqrt{3}$ ukitzaile horizontaleko puntuan funtzioa beherakorra izatetik gorakorra izatera igarotzen da; beraz, puntu horretan minimoa dauka. Kalkula ditzagun maximoaren eta minimoaren koordenatuak:

> **maximoa: = [-2*sqrt (3), f (-2*sqrt (3))];**

$$maximoa: = [-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}]$$

> **evalf (%);**

$$[-3.464101616, -5.196152424]$$

> **minimoa: = [2*sqrt (3), f (2*sqrt (3))];**

$$minimoa: = [2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$$

> **evalf (%);**

$$[3.464101616, 5.196152424]$$

Maximoak eta minimoak atzemateko, bigarren deribatuaren irizpidea ere erabil zitekeen, eta irizpide horrek hauxe dio: maximoak, izatez, ukitzaile horizontaleko puntuetatik bigarren deribatua negatibo egiten dutenak direla, eta minimoak, berriz, bigarren deribatua positibo egiten duten ukitzaile horizontaleko puntuak. Gure kasuan, ordezka ditzagun ukitzaile horizontaleko puntuak bigarren deribatuan, eta ikus dezagun bigarren deribatuak hartzen duen balioaren zeinua:

> **subs (x = -2*sqrt (3), diff (f (x), x, x));**

$$-3/4\sqrt{3}$$

Hortaz, $x = -2\sqrt{3}$ ukitzaile horizontaleko puntuan maximoa daukagu.

> **subs (x = 2*sqrt (3), diff (f (x), x, x));**

$$-3/4\sqrt{3}$$

Eta $x = 2\sqrt{3}$ ukitzaile horizontaleko puntuan minimoa. Zer gertatzen da $x = 0$ abzisadun ukitzaile horizontaleko puntuarekin?

> **subs (x = 0, diff (f (x), x, x));**

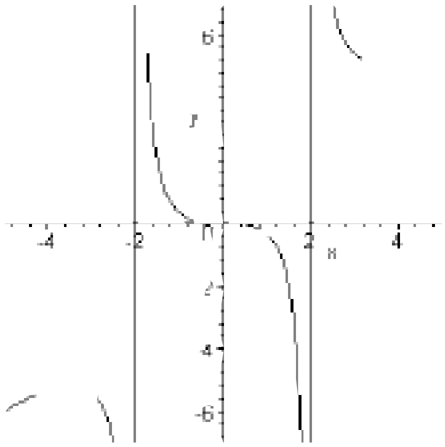
Bigarren deribatua zero egin denez, ez dakigu funtzioak $x = 0$-an maximoa, minimoa ala inflexio puntua ote daukan. Deribatzen eta deribatuan $x = 0$ ordezten jarraitu behar dugu, nulua ez den balio bat lortu arte. Ondoz ondo deribatu eta nulua ez den lehenengo deribatua ordena bakoitiko bada, funtzioak inflexioa dauka puntu horretan, eta ordena bikoitiduna bada, maximoa edo minimoa, nulua ez den balio negatiboaren edo positiboaren arabera. Beraz, ordezka dezagun $x = 0$ hirugarren deribatuan:

> **subs (x = 0, diff (f (x), x, x, x));**

$$-3/2$$

Beraz, nulua ez den lehenengo deribatua ordena bakoitiduna (hirugarrena) izan denez, inflexio puntua daukagu $x = 0$ ukitzaile horizontaleko puntuan. Egiaztatzeko, funtzioa grafikoki adieraziko dugu:

> **plot (f (x), x = -5..5, y = -7..7);**



nahi genuen bezala.

BIBLIOGRAFIA

Xabier Alberdi Larizgoitia, Ibon Sarasola: *Euskal Estilo Libururantz*.
EHUkko Argitakpen Zerbitzua.

Martxel Ensunza, Jose Ramon Etxebarria, Jazinto Iturbe:
Zientzia eta teknikarako euskara. UEU.

C.T.J. Dodson, E.A. González: *Experiments in Mathematics using Maple*. Springer.

E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano:
Cálculos Matemáticos por ordenador con Maple. V.5. Rubiños-1860, S.A.

César Pérez: *Cálculo simbólico y numérico con Mathematica*. Ra-ma.

N. Piskuno: *Kalkulu diferentziala eta integrala I eta II*. UEU.

José Colera, María José Oliveira, Rosario García: *Matematika II*. Anaya-Haritza.

José Colera, María José Oliveira, Rosario García:
Matematika Gizarte Zientziei Aplikatua II. Anaya-Haritza.

José Colera, María José Oliveira, Rosario García, Santiago Fernández:
Matematika I. Anaya-Haritza.

José Colera, María José Oliveira, Rosario García, Santiago Fernández:
Matematika Gizarte Zientziei Aplikatua II. Anaya-Haritza.

Ángel de la Llave, Juan Carlos Peral: *Matemáticas 2*. Bruño.

EUCLIDES:
"Los Elementos"
(Edición Princepts - Basilea, 1533)